수학 영역[나형] 정답과 해설

대치북스

제 1 회 정답

1	⑤	2	①	3	③	4	①	5	③
6	⑤	7	⑤	8	①	9	②	10	②
11	②	12	①	13	②	14	⑤	15	①
16	②	17	①	18	108	19	①	20	⑤
21	9	22	109	23	144	24	605	25	-6
26	⑤	27	4	28	240	29	252	30	30

해 설

1. [정답] ⑤

$4^{-\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{4}{3}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^{-1+4}=8$

2. [정답] ①

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3. [정답] ③

$\log_2 24-2\log_4 3=\log_2 24-\log_2 3=\log_2 8=3$

4. [정답] ①

$g(a)=a+2$이므로

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=(a+2)^2+a+2=12$

$a^2+5a-6=0,\ (a+6)(a-1)=0$

$a=-6$ 또는 $a=1$

따라서 양의 실수 a의 값은 $a=1$

5. [정답] ③

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.
p가 q이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$이어야 한다.

$P=\{x\mid 4x^2-4x-15\le 0\}$
$=\{x\mid (2x+3)(2x-5)\le 0\}$
$=\left\{x\mid -\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}\right\}$

$Q=\{x\mid |x|\le a\}$
$=\{x\mid -a\le x\le a\}$

이므로 $P\subset Q$이면 $a\ge\frac{5}{2}$이다.

따라서 자연수 a의 최솟값은 3이다.

6. [정답] ⑤

$\left(x-\frac{3}{x^2}\right)^9$의 전개식에서 일반항은

${}_9\mathrm{C}_r x^{9-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r$이므로

${}_9\mathrm{C}_r x^{9-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r(-3)^r x^{9-3r}$

따라서 x^3의 계수는 $9-3r=3$에서 $r=2$일 때이므로

${}_9\mathrm{C}_2(-3)^2=\frac{9\times 8}{2}\times 9=324=\frac{13}{16}$

7. [정답] ⑤

확률의 총합은 1이므로

$a+a+b=1$, 즉 $b=1-2a$

$1-2a\ge 0$에서 $a\le\frac{1}{2}$, 즉 $0\le a\le\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times a+3\times b$
$=3a+3\times(1-2a)=3-3a$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=1^2\times a+2^2\times a+3^2\times(1-2a)-(3-3a)^2$
$=5a+9-18a-9+18a-9a^2$
$=-9a^2+5a$
$=-9\left(a-\frac{5}{18}\right)^2+\frac{25}{36}\ \left(0\le a\le\frac{1}{2}\right)$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\frac{5}{18}$일 때, 최댓값 $\frac{25}{36}$를 갖는다.

8. [정답] ①

$\lim_{x\to 0-}f(f(x))=\lim_{t\to 1+}f(t)=-2$

$\lim_{x\to 1-}f(f(x))=\lim_{x\to 0+}f(t)=3$

따라서

$\lim_{x\to 0+}f(f(x))+\lim_{x\to 1-}f(f(x))=-2+3=1$

9. [정답] ②

$\int_2^x f(t)dt=x^2+x+a$의 양변에 $x=2$를

대입하면 $\int_2^2 f(t)dt=2^2+2+a=0$

이므로 $a=-6$

$\int_2^x f(t)dt=x^2+x+6$의 양변을 x에 대하여

미분하면 $f(x)=2x+1$

따라서 $f(-a)=f(6)=12+1=13$

10. [정답] ②

보험금을 지급받는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(15000,\ 0.04)$를 따른다.
이때 X의 평균과 분산을 구하면

$\mathrm{E}(X)=15000\times 0.04=600$

$\mathrm{V}(X)=15000\times 0.04\times 0.96=24^2$

15000은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 24^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 636)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{636-600}{24}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$

11. [정답] ②

그림에서 두 부분의 넓이가 같으므로

$\int_0^{a+1}x(x-a)(x-a-1)dx=0$

$\int_0^{a+1}\{x^3-(2a+1)x^2+a(a+1)x\}dx=0$

$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2a+1}{3}x^3+\frac{a(a+1)}{2}x^2\right]_0^{a+1}=0$

$\frac{(a+1)^4}{4}-\frac{(2a+1)(a+1)^3}{3}+\frac{a(a+1)^3}{2}=0$

$\frac{a+1}{4}-\frac{2a+1}{3}+\frac{a}{2}=0$

따라서 $a=1$

12. [정답] ①

구하는 확률은 7번 동안 3 또는 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건의 여사건이므로

$1-\left(\frac{2}{3}\right)^7$

따라서 $a=1,\ b=-1$이므로 $a+b=0$

13. [정답] ②

$f(x)=\frac{ax+b}{x+1}=\frac{a(x+1)-a+b}{x+1}=\frac{-a+b}{x+1}+a$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-1,\ y=a$이다.

$f(f(x))=x$에서 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선 $x=-1,\ y=a$가 만나는 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, $a=-1$이므로 $f(0)=b$에서 $b=3$

따라서 $a+b\equiv 1+3=2$

14. [정답] ⑤

$n=1$일 때, $a_1=S_1=5$

$n\ge 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=4n+1$

이 식은 $n=1$일 때도 성립하므로

$a_n=4n+1\ (n\ge 1)$

즉 수열 $\{a_n\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{19}-a_{20}+a_{21}$
$=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{21}-a_{20})$
$=5+4\times 10=45$

15. [정답] ①

A형 의자 2개와 B형 의자 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!}$이고, 이들을 원형의 테이블에 배열하면 회전하여 일치하는 것이 5가지씩 있으므로 원형의 테이블에 접시를 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{1}{5}=2$

이제 배열된 의자에 연구이사 2명과 연구원 3명이 앉는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 10=20$

16. [정답] ②

$y=g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

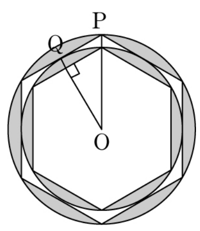
$\lim_{x\to 1+}g(f(x))=\lim_{t\to 2+}g(t)=g(2)$

$\lim_{x\to 1-}g(f(x))=\lim_{t\to 1+}g(t)=g(1)$

$\lim_{x\to 1+}g(f(x))=\lim_{x\to 1-}g(f(x))$이므로

$g(2)=g(1)$
$2^2+a\times 2=1^2+a\times 1$
따라서 $a=-3$

17. [정답] ①
집합 A 의 부분집합 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{32}$ 중 원소 1을 포함하는 집합은 집합 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합의 개수인 $2^4=16$이다.
따라서 1을 원소로 갖는 집합은 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{32}$ 중에 16개가 있다.
같은 방법으로 2, 3, 4, 5를 원소로 갖는 집합도 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{32}$ 중에 각각 16개씩 있다.
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(32)$
$=16(1+2+3+4+5)=240$

18. [정답] 108


원 A_n과 내접하는 정육각형 B_n 사이의 넓이를 S_n이라고 하고 그림에서 $\angle \mathrm{OPQ}=60^\circ$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}}\ :\ \overline{\mathrm{OQ}}=2:\sqrt{3}$
따라서 S_n과 S_{n+1}의 비는 $4:3$이다.
정육각형은 정삼각형 6 개의 넓이와 같으므로
$S_1=\pi-6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
$S_{n+1}=\dfrac{3}{4}S_n$
$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\pi-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{3}{4}}=4\pi-6\sqrt{3}$
따라서 $p=-6\sqrt{3}$ 이므로
$p^2=(-6\sqrt{3})^2=108$

19. [정답] ①
집합 $A=\{x\,|\,0\le x\le 7,\ x$는 정수$\}$에서 서로 다른 세 수를 택한 후 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $7\times{}_7\mathrm{P}_3$
백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수인 사건을 A, 십의 자리의 수가 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.
(i) 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수인 경우
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수인 경우의 수는 백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6의 3가지, 일의자리에 올 수 있는 수는 천의 자리에 온 수를 제외한 짝수 3가지이므로 $3\times 3=9$
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=4\times 3=12$
십의 자리에 올 수 있는 수의 경우의 수는 6이므로 구하는 경우의 수는
$(9+12)\times 6=126$
따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{126}{7\times{}_7\mathrm{P}_3}=\dfrac{3}{35}$
(ii) 십의 자리의 수가 홀수인 경우
$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4\times{}_7\mathrm{P}_2}{7\times{}_7\mathrm{P}_3}=\dfrac{4}{35}$
(iii) 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수이고 십의 자리의 수가 홀수인 경우
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수이고 십의 자리의 수가 홀수이면
백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6의 3가지, 일의 자리에 올 수 있는 수는 배의 자리에 온 수를 제외한 짝수 3가지, 십의 자리에 모두 홀수가 오는 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는 $3\times 3\times 4=36$
백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수이고 십의 자리의 수가 홀수이면 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3=24$
따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{36+24}{7\times{}_7\mathrm{P}_3}=\dfrac{2}{49}$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B$
$\quad=\dfrac{3}{35}+\dfrac{4}{35}-\dfrac{2}{49}=\dfrac{39}{245}$

20. [정답] ⑤
$f'(x)=\begin{cases}15x^2-20x+7 & (0<x<1)\\ -2x+a & (1<x<2)\\ 2x-4 & (2<x<4)\end{cases}$
ㄱ. $a=2,\ b=1$이면
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}(5x^3-10x^2+7x)=2,$
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}(-x^2+2x+1)=2$이므로 $x=1$에서 연속이다. [참]
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}(5x^3-10x^2+7x)=\lim_{x\to 1+}(-x^2+ax+b)$
$2=-1+a+b$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}(15x^2-20x+7)=\lim_{x\to 1+}(-2x+a)$
$2=-2+a$
따라서 $a=4,\ b=-1$ [참]
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $a=4,\ b=-1$이고
$f(x)=\begin{cases}5x^3-10x^2+7x & (0\le x<1)\\ -x^2+4x-1 & (1\le x<2)\\ x^2-4x+7 & (2\le x\le 4)\end{cases}$
$f'(x)=\begin{cases}15x^2-20x+7 & (0<x<1)\\ -2x+4 & (1<x<2)\\ 2x-4 & (2<x<4)\end{cases}$
$\displaystyle\lim_{x\to 2-}(-x^2+4x-1)=3,\ \lim_{x\to 2+}(x^2-4x+7)=3$이므로 $x=2$에서 연속이다.
$\displaystyle\lim_{x\to 2-}(-2x+4)=0,\ \lim_{x\to 2+}(2x-4)=0$이므로 $x=2$에서 미분가능하다.
따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=2$에서 미분가능하다. [참]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. [정답] 9
첫째항부터 제n항까지 합을 S_n이라 하면
$S_{2n}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$
$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$
$=6+6\times 3+6\times 5+\cdots+6\times(2n-1)$
$=6\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}$
$=6\times\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=6n^2$
$S_{2n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}$
$=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+(a_6+a_7)+\cdots+(a_{2n-2}+a_{2n-1})$
$=a_1+6\times 2+6\times 4+6\times 6+\cdots+6\times(2n-2)$
$=a_1+12\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$
$=a_1+12\times\dfrac{n(n-1)}{2}=6n^2-6n+a_1$
$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}$
$\quad=6n^2-\left(6n^2-6n+a_1\right)$
$\quad=6n-a_1$
$a_{2n-1}=S_{2n-1}-S_{2n-2}$
$\quad=\left(6n^2-6n+a_1\right)-6(n-1)^2$
$\quad=6n-6+a_1$
$a_{2n}-a_{2n+1}=6n-a_1-(6n+a_1)$
$\qquad=-2a_1$
$a_{2n-1}-a_{2n}=6n-6+a_1-(6n-a_1)$
$\qquad=2a_1-6$
$-2a_1=-3$ 또는 $2a_1-6=-3$
따라서 $a_1=\dfrac{3}{2}$이고
$S_{2n}=6n^2=\dfrac{243}{2}$을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
$S_{2n-1}=6n^2-6n+\dfrac{3}{2}=\dfrac{243}{2}$이면
$6n^2-6n-120=0$
$n^2-n-20=0$
$(n-5)(n+4)=0$
따라서 $n=5$
이때 $S_9=\dfrac{243}{2}$이므로 구하는 자연수 n의 값은 9이다.

22. [정답] 109
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{10}=10$
$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=9$
따라서 $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$\qquad=9+10^2$
$\qquad=109$

23. [정답] 144
여학생 3명을 묶어서 한 사람으로 생각하면 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 것이므로
$(5-1)!=24$(가지)
여학생 3명이 서로 위치를 바꿔 앉을 수 있으므로
$3!=6$가지
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 6=144$

24. [정답] 605
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{m=n}^{10}(m+n)\right\}$
$\displaystyle=\sum_{m=1}^{10}(m+1)+\sum_{m=2}^{10}(m+2)+\sum_{m=3}^{10}(m+3)+\cdots$
$\displaystyle\quad+\sum_{m=9}^{10}(m+9)+\sum_{m=10}^{10}(m+10)$
$\displaystyle\sum_{m=1}^{10}(m+1)=(1+2+3+\cdots+10)+1\cdot 10$
$\displaystyle\sum_{m=2}^{10}(m+2)=(2+3+\cdots+10)+2\cdot 9$
$\displaystyle\sum_{m=3}^{10}(m+3)=(3+\cdots+10)+3\cdot 8$
$\cdots$
$\displaystyle\sum_{m=9}^{10}(m+9)=(9+10)+9\cdot 2$
$\displaystyle\sum_{m=10}^{10}(m+10)=10+10\cdot 1$이므로
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left\{\sum_{m=n}^{10}(m+n)\right\}$
$\displaystyle\quad=\sum_{m=1}^{10}m^2+\sum_{m=1}^{10}m(11-m)=\sum_{m=1}^{10}11m$
$\quad=11\times\dfrac{10\times 11}{2}=605$

25. [정답] -6
$A\cap B=\{1\}$, $A-B=\{2\}$이므로 $A=\{1,\ 2\}$
집합 A 에서 (두 근의 합)$=1+2=2-a$
$\therefore\ a=-1$
$x^3+(5-a)x^2-4(b-1)x+1=0$에
$a=-1$를 대입하면

$x^3+6x^2-4(b-1)x+1=0$
따라서 집합 B 의 모든 원소의 합, 즉 세 근의 합은 -6이다.

26. [정답] 48
$f(t)=t^2-at,\ g(t)=\frac{1}{4}t^2-6t$라고 하면
두 점 P와 Q가 서로 반대 방향으로 움직일 때 $f'(t)g'(t)<0$이다.
$f'(t)=2t-a,\ g'(t)=\frac{1}{2}t-6$이므로
$(2t-a)\left(\frac{1}{2}t-6\right)<0$
이 부등식의 해는 $\frac{a}{2}<t<12$ 또는
$12<t<\frac{a}{2}$인데 구간의 길이가 3초이므로
$\frac{a}{2}=9$ 또는 $\frac{a}{2}=15$
$\therefore\ a=18$ 또는 $a=30$
따라서 상수 a의 값의 합은 48이다.

27. [정답] 4
$2^a=3^b=x^c=k$라고 하면
$a=\log_2 k,\ b=\log_3 k,\ c=\log_x k$
$\frac{1}{a}=\log_k 2,\ \frac{1}{b}=\log_k 3,\ \frac{1}{c}=\log_k x$ …… ㉠
$ab+bc+ca=0$의 양변을 abc로 나누면
$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=0$
이 식에 ㉠을 대입하면
$\log_k x+\log_k 2+\log_k 3=0$
$\log_k 6x=0$
$6x=1$
$\therefore\ 24x=4$

28. [정답] 240
사원 600명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{n}{600}$
이 회사의 전체 사원 중 하루 교통비가 5000원 미만인 사원의 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은
$\hat{p}-2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}\le p\le \hat{p}+2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}$ 이므로
$b-a=2\times 2.58\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=0.1032$
$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=\frac{1}{50},\ \hat{p}\hat{q}=\frac{6}{25}$
$\hat{q}=1-\hat{p}$이므로 $\hat{p}(1-\hat{p})=\frac{6}{25}$에서
$25\hat{p}^2-25\hat{p}+6=0$
$(5\hat{p}-3)(5\hat{p}-2)=0$
$\hat{p}=\frac{3}{5}$ 또는 $\hat{p}=\frac{2}{5}$
이때 $n\le 300$이므로 $\hat{p}=\frac{n}{600}\le\frac{300}{600}=\frac{1}{2}$에서
$\hat{p}=\frac{2}{5}$이다.
따라서 $\hat{p}=\frac{n}{600}=\frac{2}{5}$이므로 $n=240$이다.

29. [정답] 252
한 번의 게임에서 갑이 이기는 경우의 수는 갑, 을, 병 세 사람이 뽑은 카드에 적힌 수가 모두 다르고 그 중 가운데 수를 갑이 뽑은 경우이다.
갑, 을, 병이 서로 다른 세 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}P_3=10\times 9\times 8=720$이므로 세 사람 중 한사람이 이기는 확률은 $\frac{720}{10^3}=\frac{18}{25}$
이때 갑 또는 을이 이기는 확률은 $\frac{720}{10^3}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{25}$
비기는 확률은 $1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$
갑, 을이 각각 1번씩 이기고 1번은 비기는 경우의 확률은
$\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}\times\frac{7}{25}=\frac{252}{5^6}$
따라서 $a=252$

30. [정답] 30
㈎에서 $x=a$를 대입하면
$0=a^3+\left(a+\frac{7}{2}\right)a^2+2a^3-4a^3-7a$
$\frac{7}{2}a^2-7a=0,\ a(a-2)=0$
$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$
㈎에서 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)+g(x)=3x^2+(2a+7)x+2a^2$
$=3x^2+11x+8$ …… ㉠
㈏에서
$\int\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}dx=\int(9ax^2+12a^2x+15a)dx$
$f(x)g(x)=3ax^3+6a^2x^2+15ax+C$
$f(x)g(x)=6x^3+24x^2+30x+C$
이때 ㈐에서 $f(0)g(0)=3a^2=12$이므로 $C=12$
$\therefore\ f(x)g(x)=6x^3+24x^2+30x+12$
$=6(x+1)^2(x+2)$
㉠에서 $f(x)+g(x)$의 x^2의 항의 계수가 3이므로 이차함수 $f(x)$의 x^2의 항의 계수는 3이고, 일차함수 $g(x)$의 x의 항의 계수는 2이다.
(i) $f(x)=3(x+1)^2,\ g(x)=2(x+2)$인 경우
$f(x)+g(x)$
$=3(x+1)^2+2(x+2)=3x^2+6x+3+2x+4$
$=3x^2+8x+7$
㉠에 의하여 옳지 않다.
(ii) $f(x)=3(x+1)(x+2),\ g(x)=2(x+1)$인 경우
$f(x)+g(x)=3(x+1)(x+2)+2(x+1)$
$=3x^2+9x+6+2x+2$
$=3x^2+11x+8$
㉠에 의하여 옳다.
(i), (ii)에 의하여
$f(x)=3(x+1)(x+2),\ g(x)=2(x+1)$
$\therefore\ f(2)-g(2)=36-6=30$

제 2 회 정답

1	③	2	②	3	④	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	④	9	⑤	10	③
11	④	12	④	13	④	14	⑤	15	③
16	⑤	17	②	18	1	19	①	20	②
21	④	22	7	23	5	24	12	25	2
26	25	27	8	28	788	29	27	30	①

1. [정답] ③
$\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$
$=\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot 3\log_5 2$
$=\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 5}{\log 3}\cdot\frac{3\log 2}{\log 5}=3$

2. [정답] ②
$1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$
$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}$
$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{2}{3}$

3. [정답] ④
두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A,\ B^C$도 서로 독립이다.
$P(A)=1-P(A^C)=\frac{2}{3}$ 따라서
$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{2}{3}\times P(B^C)=\frac{1}{6}$
에서 $P(B^C)=\frac{1}{4}$
그러므로 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
이때 두 사건 $A^C,\ B$도 서로 독립이므로
$P(B|A^C)=P(B)=\frac{3}{4}$

4. [정답] ⑤
$x\to -1$일 때, (분자) $\to$ 0 이므로 (분모) $\to$ 0 이다.
즉, $\lim_{x\to -1}(3x^2-2x-a)=0$이므로
$3+2-a=0$
따라서 $a=5$ 이고
$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{3x^2-2x-5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(3x-5)}$
$=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{3x-5}=\frac{1}{4}$
$b=\frac{1}{4}$
따라서 $ab=5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

5. [정답] ②
세 실수 $4,\ x,\ 2y$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\times x=4+2y$
즉, 도형 l은 직선 $x-y=2$이다.
이때 직선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표는 3이고, 직선 l이 y축과 만나는 점의 y좌표는 -2이므로 도형 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

6. [정답] ③
$(A\cap C)-B=(A\cap C)\cap B^c$
$=A\cap(C\cap B^c)=A$
따라서 $A\subset(C\cap B^c)$이므로
$A\subset C$이고 $A\subset B^c$
그러므로 $(A\cap C)-B=A$가 성립하기 위한 필요충분조건은 $A\subset C$이고 $A\cap B=\varnothing$

7. [정답] ④
부모 2명을 한 묶음으로 하여 자녀 4명과 함께 원탁 둘레에 앉는 경우의 수는 $(5-1)!=24$
남학생 2명의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 부모가 이웃하여 앉는 경우의 수는
$24\times 2=48$
6명이 앉는 경우의 수는 $(6-1)!=120$
따라서 부모끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 $120-48=72$

8. [정답] ④
$x\to1+$일 때 $f(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$
따라서 $\lim\limits_{x\to1+}f(x)+\lim\limits_{x\to a-}g(x)=1$이려면
$\lim\limits_{x\to a-}g(x)=0$이다.
주어진 그림에서 $x\to a-$일 때 $g(x)\to0$을 만족시키는 상수 a의 값은 1뿐이다.

9. [정답] ⑤
이 공장에서 생산하는 구슬의 지름의 길이를 확률변수 $X(cm)$라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(24.8,\ 0.2^2)$을 따른다.
이 공장에서 생산한 구슬 중 임의추출한 25개의 지름의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=24.8$
$\sigma(\overline{X})=\dfrac{1}{\sqrt{25}}\sigma(X)=0.04$
이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(24.8,\ 0.04^2)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 24.88)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-24.8}{0.04}\le\frac{24.88-24.8}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

10. [정답] ③
$f(x)=x^3+3x^2+4x+a$에서
$f'(x)=3x^2+6x+4$
함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(b,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 1이므로
$f'(b)=3b^2+6b+4=1$에서
$(b+1)^2=0$
이므로 $b=-1$
이때 점 $(b,\ 2)$, 즉 $(-1,\ 2)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$$\begin{aligned}f(-1)&=-1+3-4+a\\&=a-2=2\end{aligned}$$
에서 $a=4$
따라서 $a+b=4-1=3$

11. [정답] ④
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)&=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx\\&=\frac{1}{2}\int_1^3(3x^2+2x+1)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[x^3+x^2+x\Big]_1^3\\&=\frac{1}{2}(39-3)=18\end{aligned}$$

12. [정답] ④
A당의 지지율을 p라 하면 표본비율
$\hat{p}=\dfrac{1470}{2100}=0.7$이므로
$\hat{q}=0.3$
$\hat{p}-2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 에서
$0.7-2\sqrt{\dfrac{0.7\times0.3}{2100}}\le p\le 0.7+2\sqrt{\dfrac{0.7\times0.3}{2100}}$
$0.68\le p\le0.72$
따라서 $n=72$

13. [정답] ④
$x^2-3x-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$이므로
$x^2-3x-2=(x-\alpha)(x-\beta)=(\alpha-x)(\beta-x)$
$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{10}(\alpha-x)(\beta-x)&=\sum_{x=1}^{10}(x^2-3x-2)\\&=\sum_{x=1}^{10}x^2-3\sum_{x=1}^{10}x-\sum_{x=1}^{10}2\end{aligned}$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-\frac{10\cdot11}{2}-2\cdot10=310$$

14. [정답] ⑤
조건 (가)에서
$\{x\,|\,1\le x\le10,\ x$는 2의 배수$\}\cap A\ne\varnothing$ 이므로 집합 A는 10이하의 자연수 중 짝수를 적어도 하나의 원소를 포함한다.
조건 (나)에서
$\{x\,|\,1\le x\le10,\ x$는 3의 배수$\}\cap A=\varnothing$ 이므로 집합 A는 3의 배수를 포함하지 않는다.
따라서 구하는 집합 A의 개수는 집합 U에서 3의 배수를 제외한 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10\}$의 부분집합에서 2, 4, 8, 10을 적어도 하나 포함하는 집합의 개수이므로
$2^7-2^4=128-16=112$

15. [정답] ③
두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.
$\sim q\to p$가 참이므로 대우명제인 $\sim p\to q$가 참이다.
따라서 $P^c\subset Q$
조건 $\sim p$: $(x+a)^2-1<0$에서
$(x+a+1)(x+a-1)<0$
$-1-a<x<1-a$
즉, $P^c=\{x\,|-1-a<x<1-a\}$
조건 q : $|x-a|<3$에서
$-3<x-a<3$
$a-3<x<a+3$
즉, $Q=\{x\,|\,a-3<x<a+3\}$
$P^c\subset Q$이므로
$a-3<-1-a,\ 1-a<a+3$
$a<1,\ -1<a$
따라서 $-1<a<1$

16. [정답] ⑤
$5\cdot2^n$의 양의 약수는 2^k와 $5\cdot2^k$의 모양이므로
(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)
$$\begin{aligned}S(n)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{5\cdot2^k}=\frac{6}{5}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\\&=\frac{6}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{12}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$
$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S(n)=\dfrac{12}{5}$

17. [정답] ②
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면
$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$ 에서
$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}\frac{|x^2-a^2|+|ax+4|}{x-2}&=\lim_{x\to2-}(-x+b)=-2+b\end{aligned}$$
극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$이므로
$\lim\limits_{x\to2+}(|x^2-a^2|+|ax+4|)=0$ 에서
$|4-a^2|+|2a+4|=0$
$4-a^2=2a+4=0$
$\therefore\ a=-2$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to2+}\frac{|x^2-4|+|-2x+4|}{x-2}&=\lim_{x\to2+}\frac{(x^2-4)+(2x-4)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2+}(x+4)=6\end{aligned}$$
따라서 $-2+b=6$ 이므로 $b=8$
$\therefore\ a+b=-2+8=6$

18. [정답] 1
(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{1!+2!}=\dfrac{1}{3}$,
(우변)$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{3}$이므로 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=m$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!+(k+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}$
위 등식의 양변에 $\dfrac{1}{(m+1)!+(m+2)!}$를 더하여 정리하면
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k!+(k+1)!}&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{1}{(m+1)!+(m+2)!}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{1}{(m+1)!(m+3)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{m+3}{(m+1)!\times(m^2+6m+9)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{m+3}{(m+1)!\times\boxed{(가)\ (m+3)^2}}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{1}{(m+1)!\times(m+3)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}+\frac{m+2}{(m+2)!\times(m+3)}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}\times\left(1-\frac{\boxed{(나)\ m+2}}{m+3}\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}\times\frac{1}{m+3}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+\boxed{(다)\ 3})!}\end{aligned}$$
그러므로 $n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다. 따라서
$f(m)=(m+3)^2,\ g(m)=m+2,\ p=3$이므로
$f(p)+g(p)=f(3)+g(3)=36+5=41$

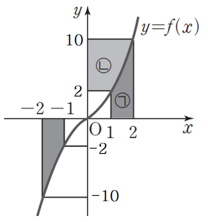
19. [정답] ①
[그림 1]에서 중심이 각각 $\mathrm{B}_1,\ \mathrm{C}_1$인 2개의 사분원의 겹치는 부분의 넓이는
$2\left(\dfrac{1}{6}\times\pi\times6^2\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times6^2=12\pi-9\sqrt{3}$
[그림 2]에서 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 x라 하자.
직각삼각형 $\mathrm{D_2B_1C_2}$에서
$\overline{\mathrm{B_1D_2}}=6,\ \overline{\mathrm{B_1C_2}}=3+\dfrac{x}{2},\ \overline{\mathrm{C_2D_2}}=x$
이므로
$\left(3+\dfrac{x}{2}\right)^2+x^2=36,\ 5x^2+12x-108=0$
$(5x-18)(x+6)=0$
따라서 $x=\dfrac{18}{5}$
$\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=6:\dfrac{18}{5}$이므로
$\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{3}{5}\overline{\mathrm{A_1B_1}}$
따라서 수열 $\{\mathrm{S}_n\}$은 첫째항이 $12\pi-9\sqrt{3}$ 이고

공비가 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ 인 등비수열이고

$$\sum_{n=1}^{INF} S_n=\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{300\pi-225\sqrt{3}}{16}$$

20. [정답] ②

함수 $f(x)=x^3+x$는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx=-\int_{-2}^{-1} f(-x)dx=\int_{2}^{1} f(t)dt$$
$$=-\int_{1}^{2} f(t)dt$$

$\int_{2}^{10} g(x)dx$은 그림의 ㉡부분의 넓이와 같다.

$$\int_{2}^{10} g(x)dx=2\times10-\int_{1}^{2} f(x)dx-1\times2$$
$$=18-\int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$\int_{2}^{10} g(x)dx-\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$
$$=18-\int_{1}^{2} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx=18$$

21. [정답] ④

$y'=\frac{1}{2}x$이므로 점 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{a^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{a^2}{4}=\frac{a}{2}(x-a)$ 즉, $y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}$

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{b^2}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}$

두 직선 $l_1,\ l_2$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}$에서 $(a-b)x=\frac{a^2-b^2}{2}$

$a\neq b$이므로 $x=\frac{a+b}{2}$

이때 $y=\frac{a}{2}\times\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$

두 직선 $l_1,\ l_2$의 교점이 $y=-1$ 위의 점이므로

$\frac{ab}{4}=-1$이고 $ab=-4$

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 두 직선 $l_1,\ l_2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left\{x^2-\left(\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left\{x^2-\left(\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)^3\right]_{a}^{\frac{a+b}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{b}{2}\right)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{b}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{a}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\times\left(\frac{b}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{a}{2}\right)^3$$
$$=\frac{b^3-a^3}{12}$$

$a<0,\ b>0$이므로 산술기하 평균에 의하여

$$S\geq\frac{1}{12}\times2\sqrt{b^3(-a^3)}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{(-ab)^3}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{4^3}\ \ (\because\ ab=-4)=\frac{4}{3}$$

22. [정답] 7

20을 4 이상이고 10 이하인 자연수만의 합으로 분할하는 모든 경우의 수는

$20=10+10$
$=10+6+4$
$=8+8+4$
$=8+6+6$
$=8+4+4+4$
$=6+6+4+4$
$=4+4+4+4+4$

의 7개이다.

23. [정답] 5

$x_1,\ x_2,\ x_3$의 공차가 d이므로

$x_1=x_2-d,\quad x_3=x_2+d$

따라서 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 평균 m과 분산 σ^2을 구하면

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{3x_2}{3}=x_2$$
$$\sigma^2=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}{3}-{x_2}^2$$
$$=\frac{(x_2-d)^2+{x_2}^2+(x_2+d)^2}{3}-{x_2}^2$$
$$=\frac{3{x_2}^2+2d^2}{3}-{x_2}^2=\frac{2}{3}d^2$$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로

$p+q=3+2=5$

24. [정답] 12

$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=2x$

그런데 $\frac{1}{2}<2x<1$이므로

$f(f(x))=f(2x)=2-2(2x)=-4x+2$

$f(f(x))=x$에서 $-4x+2=x$

$\therefore\ x=\frac{2}{5}$

$\therefore\ 30\alpha=30\times\frac{2}{5}=12$

25. [정답] 2

(i) $a=1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-b)}{(x-1)(2x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-b}{2x-1}$$
$$=1-b=5$$

따라서 $b=-4$

(ii) $a\neq1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-a)(x-b)}{2x^2-3x+a}=\frac{(1-a)(1-b)}{a-1}$$
$$=b-1=5$$

따라서 $b=6$

이때 $-4+6=2$이다.

26. [정답] 25

$\sqrt{\frac{2^a\cdot3^b}{3}}=\sqrt{2^a\cdot3^{b-1}}=2^{\frac{a}{2}}\cdot3^{\frac{b-1}{2}}$이 자연수이면

a과 $b-1$은 0 또는 자연수인 짝수이므로 b는 홀수이다.

$\sqrt[3]{\frac{3^b\cdot5^a}{5}}=\sqrt[3]{3^b\cdot5^{a-1}}=3^{\frac{b}{3}}\cdot5^{\frac{a-1}{3}}$이 자연수이면 b와 $a-1$은 0 또는 자연수인 3의 배수이다.

(i) a가 짝수이고 $a-1$이 3의 배수이므로

$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$에서 $a=6k+4$ (k는 정수)의 꼴이다.

이때 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$로 a의 개수는 5개다.

(ii) b가 홀수이고 3의 배수이므로

$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5$에서 $a=6k+3$ (k는 정수)의 꼴이다.

이때 $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$로 b의 개수는 5개다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\times5=25$

27. [정답] 8

$f(x+y)=f(x)+f(y)$에서 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$

따라서 $f(0)=0$

$f(x)=ax+b$ ($a,\ b$은 상수)라 하면

$f(0)=b=0,\ f(1)=a+b=3$이므로

$a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x$

$$\text{이때 } g(x)=\frac{f(x)+6}{f(x)-6}=\frac{3x+6}{3x-6}$$
$$=\frac{x+2}{x-2}=\frac{4}{x-2}+1$$

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{4}{t-2}+1\right)\ (t\neq2)$라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t-2)^2+\frac{16}{(t-2)^2}}$$

이때 $(t-2)^2>0,\ \frac{16}{(t-2)^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(t-2)^2+\frac{16}{(t-2)^2}\geq2\sqrt{(t-2)^2\times\frac{16}{(t-2)^2}}$$
$$=2\times4=8$$

(단, 등호는 $(t-2)^2=\frac{16}{(t-2)^2}$ 즉, $t=4$ 또는 $t=0$일 때 성립한다.)

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$이므로 구하는 최솟값은 $l=2\sqrt{2}$이므로

$l^2=8$

28. [정답] 788

(i) 1명씩 내릴 때

네 명이 내리게 될 4개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 5개이다. 이 5개의 층 사이 및 양 끝의 6곳 (∨ 표시된 곳) 중에서 서로 다른 4곳을 택하여 각각 1명씩 내리면 된다.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$

(ii) 1명, 1명, 2명씩 내릴 때

같이 내릴 2명을 선택하는 경우의 수가

${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2}=6$

내리게 될 3개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 6개다.

위와 같은 방법으로 이 6개의 층 사이 및 양 끝의 7곳 중에서 서로 다른 3곳을 택하여 내리면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{P}_3=6\times(7\times6\times5)=1260$

(ii) 2명, 2명씩 내릴 때

같이 내릴 2조를 선택하는 경우의 수가

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4\times3}{2}\times\dfrac{1}{2}=3$

내리게 될 2개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 7개다.
위와 같은 방법으로 이 7개의 층 사이 및 양 끝의 8곳 중에서 서로 다른 2곳을 택하여 내리면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
$3\times{}_8\mathrm{P}_2=3\times(8\times7)=168$
구하는 경우의 수는
$n=360+1260+168=1788$
따라서 $n-1000=788$

29. [정답] 27

집합 A의 원소의 개수를 a, 집합 B의 원소의 개수를 b, 집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 c라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{a}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{b}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{c}{6}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A)P(B)=P(A\cap B)$가 성립해야 한다.
$\dfrac{ab}{36}=\dfrac{c}{6}$에서 $ab=6c$
이때 $c=1$ 또는 $c=2$이다.
(i) $c=1$이면 $A\cap B=\{$빨강$\}$이다.
$ab=6c$에서 $ab=6$이고 노랑 $\not\in S$이다.
$a\le 3$, $b\le 4$이므로
① $a=2$, $b=3$인 경우
집합 A의 개수는 파랑과 보라색 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 S의 나머지 2개의 원소는 남색과 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $2\times3=6$
② $a=3$, $b=2$인 경우
집합 A는 $\{$빨강, 파랑, 보라색$\}$이고, 집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 S의 나머지 2개의 원소는 남색과 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $1\times3=3$
(ii) $c=2$이면 $A\cap B=\{$빨강, 노랑$\}$
$ab=6c$에서 $ab=12$이고 $a\le 4$, $b\le 5$이므로 a, b는 다음 2가지 경우이다.
① $a=3$, $b=4$인 경우
집합 A의 개수는 파랑, 보라색 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 S의 나머지 1개의 원소는 남색 또는 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $2\times3\times2=12$
② $a=4$, $b=3$인 경우
집합 A는 $\{$빨강, 노랑, 파랑, 보라색$\}$이고 집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 S의 나머지 1개의 원소는 남색 또는 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $1\times3\times2=6$
(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는
$6+2+12+6=27$

30. [정답] ①

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-x+h)+f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x-h)+f(-x)}{h}$
이 존재하므로 $h\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로
$f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=0$
따라서 $f(-x)=-f(x)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=0$에서 $x\to2$일 때
(분모)$\to0$이므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $f(2)=4$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로
$f'(2)=0$
한편, $f(-x)=-f(x)$에서
$f'(-x)=f'(x)$이므로
함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
그런데 $f'(2)=0$이므로 $f'(-2)=0$이다.
삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이므로
$f'(x)=k(x+2)(x-2)$ $(k\neq0)$으로 놓을 수 있고
$f'(1)=-9$이므로 $-3k=-9$에서 $k=3$
즉, $f'(x)=3(x+2)(x-2)$이므로
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-12)dx=x^3-12x+C\ (C\text{는 적분상수})$$
$f(-x)=-f(x)$에서 $f(0)=0$이므로 $C=0$에서 $C=20$
따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로
$f(-3)=-27+36=9$

제 3 회 정답

1	②	2	①	3	⑤	4	⑤	5	⑤
6	②	7	⑤	8	③	9	①	10	⑤
11	②	12	④	13	⑤	14	④	15	⑤
16	75	17	③	18	④	19	③	20	④
21	⑤	22	42	23	4	24	3	25	11
26	8	27	90	28	10	29	26	30	7

1. [정답] ②

$$\sqrt{8}\times4^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}-1}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

2. [정답] ①

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 5,\ 6\}$에서
$A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B=\{1,\ 5\}$
따라서 집합 $A-B^C$의 원소의 개수는 2이다.

3. [정답] ⑤

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
따라서 $n(A\cup B)=10+12-5=17$

4. [정답] ⑤

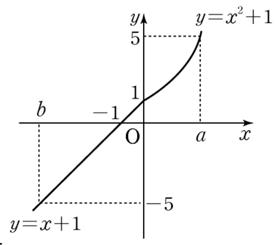
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_2=3a_{10}$에서
$a_1+d=3(a_1+9d)$이므로
$a_1=-13d$ ······ ㉠
$a_k=5a_{17}$에서
$a_1+(k-1)d=5(a_1+16d)$이므로
$a_1=\dfrac{(k-81)d}{4}$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{k-81}{4}=-13$

따라서 $k=29$

5. [정답] ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{6}$
$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{3}\times\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{6}$ 이므로
$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{4}$이고 $\mathrm{P}(B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

6. [정답] ②



$f^{-1}(5)=a$라고 하면
$f(a)=5$이므로 오른쪽 그림에서 $a^2+1=5$
$\therefore\ a=\pm2$
$a>0$이므로 $a=2$
$f^{-1}(-5)=b$라고 하면
$f(b)=-5$이므로 그래프에서 $b+1=-5$
$\therefore\ b=-6$
$\therefore\ f^{-1}(5)+f^{-1}(-5)=2+(-6)=-4$

7. [정답] ⑤

조건 '$f(x)g(x)\neq0$'은 조건 '$f(x)\neq0$이고 $g(x)\neq0$'과 같으므로 부정은 '$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$'이다.
따라서 진리집합은 $P^c\cup Q^c=(P\cap Q)^c$이다.

8. [정답] ③

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$에서 $f'(1)=2$이므로
$f'(x)=3x^2-2x+a$에서 $f'(1)=1+a=2$
$a=1$
$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$
$f(0)=C=2$
따라서 $f(x)=x^3-x^2+x+2$이므로 $f(1)=3$

9. [정답] ①

$a_{n+1}=3a_n-n^2$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면
$a_2=3a_1-1=2$
$a_3=3a_2-4=2$
$a_4=3a_3-9=-3$
$a_5=3a_4-16=-25$

10. [정답] ⑤

모음 사이에 들어갈 자음 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$
두 모음과 그 사이에 서는 자음을 하나의 그룹으로 생각하면 나머지 자음 3개와 이 그룹을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
모음 2개의 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times24\times2=192$

11. [정답] ②

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $\lim\limits_{x\to3}(x-3)=0$ 이므로
$\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-2\}=0$이고 $f(3)=2$
$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=1$

같은 방법으로 $\lim_{x\to3}\frac{g(x)-1}{x-3}=2$에서
$g(3)=1,\ g'(3)=2$
$y=f(x)g(x)$를 x에 대하여 미분하면
$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
$y'_{x=3}=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$
$=1\times1+2\times2=5$
또, $f(3)g(3)=2\times1=2$이므로
구하는 접선의 방정식은
$y=5(x-3)+2=5x-13$
따라서 $a=5,\ b=-13$이므로
$a+b=5-13=-8$

12. [정답] ④
$\lim_{x\to2+}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$
$\lim_{x\to3+}f(|f(x)|)=\lim_{t\to0-}f(|t|)$
$=\lim_{u\to0+}f(u)$
$=0$
따라서 $\lim_{x\to2+}f(f(x))+\lim_{x\to3+}f(f(|x|))=1$

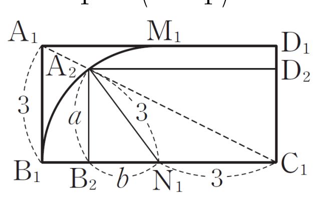
13. [정답] ⑤
$F(x)=f(x)g(x)$라고 하면
$F(0)=f(0)g(0)=2$이므로 ㈏에서
$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=(-3)\cdot2+1\cdot g'(0)$
$=-6+g'(0)=5$
따라서 $g'(0)=11$

14. [정답] ④
주사위 2 개를 동시에 던져 나온 두 눈의 곱이 홀수일
확률은 $\frac12\times\frac12=\frac14$ 이므로 두 눈의 곱이 짝수일
확률은 $1-\frac14=\frac34$
꼭짓점 A 에서 출발한 점 P 가 시행을 6 번
반복했을 때, 꼭짓점 C 에 오는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 짝수가 2번 홀수가 4번 나오는 경우
${}_6C_4\left(\frac14\right)^4\left(\frac34\right)^2=\frac{135}{2^{12}}$
(ⅱ) 짝수가 4번 홀수가 2번 나오는 경우
${}_6C_2\left(\frac14\right)^2\left(\frac34\right)^4=\frac{1215}{2^{12}}$
따라서 구하는 확률은
$\frac{135+1215}{2^{12}}=\frac{675}{2^{11}}$

15. [정답] ⑤
확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{100}\right)$을 따르고,
확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.
$P\left(\overline{X}\ge m+\frac{\sigma}{5}\right)+P\left(\overline{Y}\ge m-\frac{\sigma}{6}\right)=1$ 에서
$P(Z\ge2)+P\left(Z\ge-\frac{\sqrt{n}}{6}\right)=1$
이므로 $2=\frac{\sqrt{n}}{6}$이고 $\sqrt{n}=12$
따라서 $n=144$

16. [정답] 75
조건 ㈎에서 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2g(x)+(2x-1)g'(x)$
이 식과 $f(x)=(2x-1)g(x)$를 조건 ㈏의 식에
대입하면
$\{2g(x)+(2x-1)g'(x)\}g(x)-(2x-1)g(x)g'(x)$
$=2(x^2+1)^2$
$2\{g(x)\}^2=2(x^2+1)^2$
$g(x)=x^2+1$ 또는 $g(x)=-x^2-1$
(ⅰ) $g(x)=x^2+1$인 경우
$f(x)=(2x-1)g(x)=(2x-1)(x^2+1)$이므로
$f(2)\times g(2)=15\times5=75$
(ⅱ) $g(x)=-x^2-1$인 경우
$f(x)=(2x-1)g(x)=(2x-1)(-x^2-1)$이므로
$f(2)g(2)=(-15)\times(-5)=75$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(2)g(2)=75$

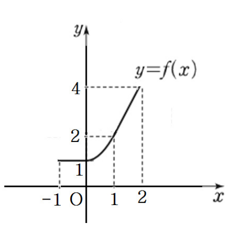
17. [정답] ③
이산확률변수 X의 모든 값에 대한 확률의 합은
1 이므로
$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=100)$
$=4^{50}\left\{{}_{100}C_0\left(\frac13\right)^0p^{100}+{}_{100}C_1\left(\frac1{63}\right)^1p^{99}+{}_{100}C_2\left(\frac13\right)^2p^{98}+\cdots+{}_{100}C_{100}\left(\frac13\right)^{100}p^0\right\}$
$=2^{100}\left(\frac13+p\right)^{100}=1$
$\left(\frac23+2p\right)^{100}=1$이므로 $\frac23+2p=1$
$2p=1-\frac23=\frac13$
따라서 $p=\frac16$

18. [정답] ④
그림 T_1에 어두운 부분의 넓이 S_1은
($\square A_1B_1N_1M_1$의 넓이)−(부채꼴 $B_1N_1M_1$의 넓이)
$=3^2-3^2\times\pi\times\frac14=9\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$


위의 그림에서 $\overline{A_2B_2}=a,\ \overline{B_2N_1}=b$라 하면
$\overline{A_2N_1}=3$이고, 삼각형 $A_2B_2N_1$은
직각삼각형이므로
$a^2+b^2=3^2$ …… ㉠
$\overline{N_1C_1}=3$이고,
$\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_1}=\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C_1}=1:2$이므로
$a:(b+3)=1:2$
즉, $b+3=2a$에서 $b=2a-3$이므로 ㉠에
대입하면
$a^2+(2a-3)^2=9$
$5a^2-12a=0,\ a(5a-12)=0$
따라서 $a=\frac{12}{5}$ ($\because\ a\ne0$)이고
그림 T_1과 그림 T_2의 닮음비는
$3:\frac{12}{5}=5:4$이므로 넓이의 비는 $25:16$이다.
즉, 그림 T_{n+1}의 넓이는 그림 T_n의 넓이의
$\frac{16}{25}$이다.
따라서
$S_1-S_2+S_3-S_4+S_5-S_6+\cdots$
$=S_1-S_1\times\frac{16}{25}+S_1\times\left(\frac{16}{25}\right)^2-S_1\times\left(\frac{16}{25}\right)^3+S_1\times\left(\frac{16}{25}\right)^4-\cdots$
$=\frac{S_1}{1-\left(-\frac{16}{25}\right)}=\frac{9\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{41}{25}}$
$=\frac{225}{41}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$
따라서 $p=41,\ q=225$이고
$p+q=266$

19. [정답] ③
$F(t)=P(X\ge m-a\sigma t)$
$=P\left(Z\ge\frac{m-a\sigma t-m}{\sigma}\right)=P(Z\ge-at)$
$G(t)=P(Y\le 2m+b\sigma t)$
$=P\left(Z\le\frac{2m+b\sigma t-2m}{2\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{bt}{2}\right)$
ㄱ. $F(1)=P(Z\ge-a)$,
$G(2)=P(Z\le b)=P(Z\ge-b)$
$F(1)=G(2)$이면
$-a=-b$이므로 $a=b$ [참]
ㄴ. 양수 t에 대하여 $G(t)<F(t)$이면
$P\left(Z\le\frac{bt}{2}\right)<P(Z\ge-at)$
$P\left(Z\ge-\frac{bt}{2}\right)<P(Z\ge-at)$
$-\frac{bt}{2}>-at$
$b<2a$ [거짓]
ㄷ. $2t_1<t_2$이면 $-t_1>-\frac{t_2}{2}$에서 $a>0$이므로
$-at_1>-\frac{at_2}{2}$
$F(t_1)=P(Z\ge-at_1)<P\left(Z\ge-\frac{at_2}{2}\right)$
$G(t_2)=P\left(Z\le\frac{bt_2}{2}\right)=P\left(Z\ge-\frac{bt_2}{2}\right)$
㉠에 의해 $F(t_1)<G(t_2)$이려면
$-\frac{at_1}{2}\ge-\frac{bt_2}{2}$이므로
$a\le b$ [참]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20. [정답] ④
ㄱ. $F(3)=P(1\le X\le3)$
$=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$
$=\frac1a+\frac2a+\frac3a=\frac6a$ [거짓]
ㄴ. $F(k)+G(k)=P(1\le X\le k)+P(X>k)$
$=P(1\le X\le100)=1$ [참]
ㄷ. $F(m)-F(n)=P(n\le X\le m)$
$=P(X>n)-P(X>m)$
$=G(n)-G(m)$ [참]
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21. [정답] ⑤
$0\le x\le1$에서
$f(x)=x^2+1,\ f'(x)=2x$이므로
$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(0)=0,\ f'(1)=2$
$\int_{-1}^{2}f(x)dx$의 값이 커지려면
$0\le f'(x)\le2$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프가
그림과 같이
$-1\le x\le2$에서
x축에서 멀어야 한다.


$0\le f'(x)\le2$이므로
$-1\le x\le0$에서 $f(x)=1$
$0\le x\le1$에서 $f(x)=x^2+1$
$1\le x\le2$에서 $f(x)=2x$이다.

$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

$= \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} (x^2+1)dx + \int_{1}^{2} 2x dx$

$= \Big[\ x\ \Big]_{-1}^{0} + \Big[\ \frac{1}{3}x^3 + x\ \Big]_{0}^{1} + \Big[\ x^2\ \Big]_{1}^{2}$

$= 1 + \frac{4}{3} + 3 = \frac{16}{3}$

22. [정답] 42

집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$

공집합 또는 A 자신이 되는 부분집합의 개수는 2

두 집합의 원소의 개수가 같은 경우는

${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

따라서 구하는 분할의 개수는 $64-2-20=42$

23. [정답] 4

$g'(x) = (6x-1)f(x) + (3x^2-x)f'(x)$

따라서 $g'(1) = 5f(1) + 2f'(1)$

$= 5\times2 + 2\times(-3) = 4$

24. [정답] 3

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{3^k+2} = a_1 + (3^k+1)d$

수열 $\{a_{3^k+2}\}$이 등비수열을 이루므로

$a_{3+2} = a_1 + (3+1)d = a_1 + 4d$

$a_{3^2+2} = a_1 + (3^2+1)d = a_1 + 10d$

$a_{3^3+2} = a_1 + (3^3+1)d = a_1 + 28d$

따라서 $a_1+4d,\ a_1+10d,\ a_1+28d$가 등비수열을 이루므로

$(a_1+10d)^2 = (a_1+28d)(a_1+4d)$

${a_1}^2 + 20a_1d + 100d^2 = {a_1}^2 + 32a_1d + 112d^2$

$12a_1d = -12d^2$

$d = -a_1$

따라서 $-\frac{a_5}{a_1} = -\frac{a_1+4d}{a_1} = -\frac{a_1-4a_1}{a_1} = 3$

25. [정답] 11

$(A-B)\cup(B-A) = \{5\}$, $A-B\subset A$이고

$5\not\in A$이므로 $A-B=\varnothing$이다.

따라서 $B-A=\{5\}$이고, $5\in B$가 성립한다.

그런데 $A-B=\varnothing$에서 $A\subset B$이므로

$\{1,\ 2,\ 3\}\subset B$이다.

따라서 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로 모든 원소의 합은 11이다.

26. [정답] 8

조건 ㈎에서

$x=0,\ y=0$이면 $f(0)=f(0)+f(0)$에서

$f(0)=0$

$x=1,\ y=-1$이면 $f(0)=f(1)+f(-1)$에서

$f(-1)=-f(1)$

이때 조건 ㈏에서 함수 f는 일대일함수이므로

$f(1)\neq0,\ f(-1)\neq0$

같은 방법으로

$f(-2)=-f(2)$이고 $f(2)\neq0,\ f(-2)\neq0$

따라서 두 조건을 모두 만족하는 함수 f의 개수는

0이 대응할 수 있는 원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$의 1가지이고

2가 대응할 수 있는 원소는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2$에서 1과 -1이 대응되지 않은 2가지,

-2이 대응할 수 있는 원소는 $-f(2)$의 1가지이다.

따라서 함수 f의 개수는 $1\times4\times2=8$

27. [정답] 90

♥♣♤의 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times3!} = 140$

적어도 한 종류의 카드가 2장 이상 연속하게 나열되는 사건을 X라 하면 X의 여사건 X^c은 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 것이다.

♥♥♥를 ①♥②♥③♥④와 같이 나열한 후 ①, ②, ③, ④의 자리에 ♣♣♣♤를 놓는 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) ②, ③에 ♣♣를 놓는 경우

♣♤는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로

$2\times2=4$가지

(ⅱ) ②, ③에 ♣♤를 놓는 경우

♣♤를 ②, ③에 놓는 경우의 수는 $2!=2$가지

♣♣는 ① 또는 ④에 놓을 수 있지만 함께 놓을 수 없으므로 1가지

따라서 ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는

$2\times1=2$가지

(ⅲ) ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우

(♣♤)의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$가지

②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는 $2!=2$가지

♣는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 2가지

따라서 ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 카드 7장을 같은 종류를 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$4+2+8=14$이므로

$\mathrm{P}(X^c) = \frac{14}{140} = \frac{1}{10}$ 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X) = 1-\mathrm{P}(X^c) = 1-\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

따라서 $p=\frac{9}{10}$이므로 $100p=90$

28. [정답] 10

선분 AB의 기울기는 1이므로 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$이므로

$y_2-y_1=x_2-x_1$

$y_2-y_1=x_2-x_1=k$라고 하면

$\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$이므로 k는 자연수이다.

$y_2=y_1+k,\ x_2=x_1+k$를

$x_1+y_1+x_2+y_2=12$에 대입하면

$x_1+y_1+x_1+k+y_1+k=12$

$x_1+y_1+k=6$

세 자연수 $x_1,\ y_1,\ k$를 음이 아닌 정수

$x'_1,\ y'_1,\ k'$에 대하여

$x_1=x'_1+1,\ y_1=y'_1+1,\ k=k'$로 놓으면

$x'_1+y'_1+k'=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해는

${}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10$

29. [정답] 26

㈏에서 $f'(x)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f'(0)=a=15$

$\therefore\ f'(x)=15(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int 15(x^4-2x^2+1)dx$

$=3x^5-10x^3+15x+C$ ……㉠

$F(x)=\int_0^x f(x)dx$라고 하면

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$이고,

$\lim_{x\to0}\frac{1}{20x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{20(x-0)}$

$=\frac{1}{20}F'(0)=-1$

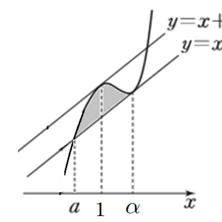
$\therefore\ F'(0)=-20=f(0)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)=3x^5-10x^3+15x-20$

$\therefore\ f(2)=96-80+30-20=26$

30. [정답] 7

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 $1<\alpha$이므로 직선 $y=x+2$와 $x=\alpha$에서 접하고, 직선 $y=x+3$과는 $x=1$에서 접한다.



삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 접점 외에 만나는 x좌표가 a라 하면

$f(x)-(x+2)=(x-\alpha)^2(x-a)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x-\alpha)^2(x-a)+x+2$이므로

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-a)+2(x-\alpha)^2+1$

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+3$가 접점 외에 만나는 x좌표가 b라 하면

$f(x)-(x+3)=(x-1)^2(x-b)$

으로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x-1)^2(x-b)+x+3$

이므로

$f'(x)=2(x-1)(x-b)+2(x-1)^2+1$

$f'(\alpha)=f'(1)=1$이므로

$f'(\alpha)=2(\alpha-1)(\alpha-b)+2(\alpha-1)^2+1=1$

$f'(1)=2(1-\alpha)(1-a)+2(1-\alpha)^2+1=1$

두 식을 서로 더하고 빼면

$2(\alpha-1)(\alpha-b)+2(1-\alpha)(1-a)+4(\alpha-1)^2+2=2$

$2(\alpha-1)(\alpha-b)-2(1-\alpha)(1-a)=0$

$\alpha>1$이므로

$(\alpha-b)-(1-a)+2(\alpha-1)=0$

$(\alpha-b)+(1-a)=0$

따라서 $3\alpha+a-b=3,\ \alpha-a-b=-1$ …… ㉠

$f(\alpha)=(\alpha-1)^2(\alpha-b)+\alpha+3=\alpha+2$

$f(1)=(1-\alpha)^2(1-a)+3=4$

두 식을 서로 빼면

$(\alpha-1)^2(\alpha-b)-(1-\alpha)^2(1-a)=-2$

$(\alpha-1)^2(\alpha+a-b-1)=-2$

$a-b=3-3\alpha$를 대입하면

$(\alpha-1)^2(\alpha+3-3\alpha-1)=-2$

$(\alpha-1)^3=1$

$\alpha-1=1$이므로 $\alpha=2$

㉠에서 $a-b=-3,\ a+b=3$이므로 $a=0,\ b=3$

$f(x)=(x-2)^2(x-0)+x+2$

$=x^3-4x^2+5x+2$

곡선 $y=f(x)$와 $x=2$에서 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2\{(x^3-4x^2+5x+2)-(x+2)\}dx$

$=\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\Big]_0^2$

$=\frac{1}{4}\times16-\frac{4}{3}\times8+2\times4=\frac{4}{3}$

따라서 $p=3,\ q=4$이므로

$p+q=3+4=7$