대학수학능력시험 대비 모의고사

수학 영역(가형) 정답과 해설

대치북스

제 1 회 정답

1	③	2	④	3	①	4	②	5	①
6	②	7	⑤	8	②	9	①	10	②
11	③	12	⑤	13	⑤	14	③	15	①
16	②	17	⑤	18	①	19	③	20	④
21	③	22	109	23	144	24	40	25	240
26	8	27	4	28	11	29	1512	30	22

해 설

1. [정답] ③

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ -3)+2(1,\ 3)$
$=(2,\ -3)+(2,\ 6)$
$=(4,\ 3)$

따라서 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

2. [정답] ④

$\log_x x^2=3\log_x 2-1=\log_x 2^3x^{-1}$

$x^2=2^3x^{-1}$

따라서 $x^3=2^3$이고 $x>0$이므로 $x=2$

3. [정답] ①

${}_5\mathrm{P}_k=120$에서 $\dfrac{5!}{(5-k)!}=120$

$(5-k)!=1$

$5-k=1$ 또는 $5-k=0$

따라서 $k=4$ 또는 $k=5$이므로 합은

$5+4=9$

4. [정답] ②

$\mathrm{P}(1,\ 2,\ 3)$를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 $\mathrm{Q}(-1,\ 2,\ 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(1-(-1))^2+0+0}=2$

5. [정답] ①

다항식 $(2x+3)^{10}$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b(a,\ b$는 상수)라 하면

$(2x+3)^{10}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $1=-a+b$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$20(2x+3)^9=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$ ……㉡

㉡에 $x=-1$을 대입하면

$20=a$

$b=a+1=21$

따라서 $R(x)=20x+21$이므로 $R(-1)=1$

6. [정답] ②

$\sin x=t$로 치환하면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고

$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx=\int_0^1 t^2 dt$

$=\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^1=\dfrac{1}{3}(1-0)=\dfrac{1}{3}$

7. [정답] ⑤

$\left(x-\dfrac{3}{x^2}\right)^9$의 전개식에서 일반항은

${}_9\mathrm{C}_r x^{9-r}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^r$이므로

${}_9\mathrm{C}_r x^{9-r}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r(-3)^r x^{9-3r}$

따라서 x^3의 계수는 $9-3r=3$에서 $r=2$일 때이므로 ${}_9\mathrm{C}_2(-3)^2=\dfrac{9\times8}{2}\times9=324$

8. [정답] ②

두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{B}(5,\ b,\ c)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ b-2,\ c-3)$이고

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 평면 $2x-2y+z=a$의 법선벡터

$(2,\ -2,\ 1)$과 평행하므로

$(4,\ b-2,\ c-3)=k(2,\ -2,\ 1)$

(k는 0이 아닌 실수)

$4=2k,\ b-2=-2k,\ c-3=k$

따라서 $k=2,\ b=-2,\ c=5$

즉, $\mathrm{B}(5,\ -2,\ 5)$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{2+(-2)}{2},\ \dfrac{3+5}{2}\right)$

즉, $\mathrm{M}(3,\ 0,\ 4)$이다.

점 $\mathrm{M}(3,\ 0,\ 4)$는 평면 $2x-2y+z=a$ 위의 점이므로 $6-0+4=a,\ a=10$

따라서 $a+b+c=10+(-2)+5=13$

9. [정답] ①

함수 $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 연속이다.

$\displaystyle\lim_{x\to e-}f(x)=\lim_{x\to e+}f(x)=f(e)$

$e^{e-e}+a=b\ln(2e-e)+1$

$a=b$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=e$에서 미분가능하므로

$\displaystyle\lim_{x\to e-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$

$f(e)=b+1$이므로

이를 위의 좌변과 우변에 각각 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to e-}\frac{(e^{x-e}+a)-(b+1)}{x-e}$

$\displaystyle=\lim_{x\to e+}\frac{\{b\ln(2x-e)+1\}-(b+1)}{x-e}$

$\displaystyle\lim_{x\to e-}\frac{e^{x-e}-1}{x-e}=\lim_{x\to e+}\frac{b\{\ln(2x-e)-1\}}{x-e}$

두 함수 $g(x)=e^{x-e}$, $h(x)=\ln(2x-e)$는 $x=e$에 미분가능하고, 도함수가 각각

$g'(x)=e^{x-e}$, $h'(x)=\dfrac{2b}{2x-e}$이므로

$g'(e)=h'(e)$

$e^0=\dfrac{2b}{e}$, $b=\dfrac{e}{2}$

㉠에서 $a=\dfrac{e}{2}$ 따라서 $a+b=e$

10. [정답] ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=2$, $\tan\alpha\tan\beta=-5$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{2}{1-(-5)}=\dfrac{1}{3}$

이므로 $\cot(\alpha+\beta)=3$

따라서 $\csc^2(\alpha+\beta)=\cot^2(\alpha+\beta)+1$
$=3^2+1=10$

11. [정답] ③

포물선의 정의에 의해서 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여

$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=|x+1|$

이고 양변을 제곱하면

$x^2-6x+9+(y-4)^2=x^2+2x+1$

$(y-4)^2=8(x-1)$

이 포물선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$8(a-1)=25$

$a-1=\dfrac{25}{8}$

$a=\dfrac{33}{8}$

12. [정답] ⑤

$\vec{p}=(x,\ y)$라 하면 조건 (가)에서 $x^2+y^2=40$이고

조건 (나)에서 $x+6y=-5x+4y$이므로 $y=3x$

$x^2+y^2=40$에 대입하면 $10x^2=40,\ x^2=4$

$x>0$이므로 $x=2,\ y=6$

따라서 $\vec{p}=(2,\ 6)$이므로

벡터 $\vec{p}$의 모든 성분의 곱은 $2\times6=12$

13. [정답] ⑤

확률의 총합은 1이므로

$a+a+b=1$, 즉 $b=1-2a$

$1-2a\ge0$에서 $a\le\dfrac{1}{2}$, 즉 $0\le a\le\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X)=1\times a+2\times a+3\times b$
$=3a+3\times(1-2a)$
$=3-3a$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=1^2\times a+2^2\times a+3^2\times(1-2a)-(3-3a)^2$
$=5a+9-18a-9+18a-9a^2$
$=-9a^2+5a$
$=-9\left(a-\dfrac{5}{18}\right)^2+\dfrac{25}{36}\ \left(0\le a\le\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\dfrac{5}{18}$일 때, 최댓값 $\dfrac{25}{36}$를 갖는다.

14. [정답] ③

$f(x)=x(\ln x-n)$에서

$f'(x)=1\times(\ln x-n)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x-n+1$

$f'(x)=0$에서 $x=e^{n-1}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{n-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

이때 함수 $f(t)$는 $x=e^{n-1}$에서 극소이고 최솟값은

$a_n=f(e^{n-1})=e^{n-1}(\ln e^{n-1}-n)=-e^{n-1}$

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\ln(-a_n)=\sum_{n=1}^{10}\ln e^{n-1}=\sum_{n=1}^{10}(n-1)$

$=\dfrac{9\times10}{2}=45$

15. [정답] ①

A형 의자 2개와 B형 의자 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!2!}$이고, 이들을 원형의 테이블에 배

열하면 회전하여 일치하는 것이 5가지씩 있으므로 원형의 테이블에 접시를 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{1}{5}=2$

이제 배열된 의자에 연구이사 2명과 연구원 3명이 앉는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times 10=20$

16. [정답] ②

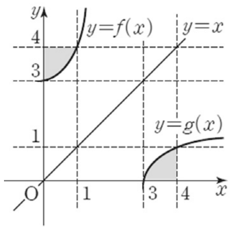
함수 $f(x)=xe^{x-1}+3$을 미분하면

$f'(x)=(x+1)e^{x-1}$

$x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가함수이다.

$f(0)=3,\ f(1)=4$이므로 $g(3)=0,\ g(4)=1$이다.

두 함수 $y=f(x),\ g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$에 대칭이므로 그림과 같다.



따라서 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned}\int_3^4 g(x)dx&=\int_0^1\{4-f(x)\}dx\\&=\int_0^1\{4-(xe^{x-1}+3)\}dx\\&=\int_0^1(1-xe^{x-1})dx\\&=\int_0^1 1dx-\int_0^1 xe^{x-1}dt\\&=[x]_0^1-\left\{[xe^{x-1}]_0^1-\int_0^1 e^{x-1}dx\right\}\\&=(1-0)-\left(1-[e^{x-1}]_0^1\right)\\&=1-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

17. [정답] ⑤

포물선의 꼭짓점을 P, 초점 F$(3,\ 2)$에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{FH}}=3-(-1)=4$에서 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}=2$

따라서 꼭짓점은 P$(1,\ 2)$이고 포물선의 방정식이 $p>0$에 대하여 $(y-2)^2=4p(x-1)$이다.

양변을 x에 대하여 미분하면

$2(y-2)\dfrac{dy}{dx}=4p$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4p}{y-2}$ 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이면 $\dfrac{4p}{y-2}=\dfrac{1}{2}$

$y=8p+2$이고 $(y-2)^2=4p(x-1)$에 대입하면

$(8p+2-2)^2=4p(x-1)$에서

$64p^2=4p(x-1)$

$x=16p+1$

그러므로 점 A는 A$(16p+1,\ 8p+2)$이고 이 점에서 접선의 식은

$y-(8p+2)=\dfrac{1}{2}\{x-(16p+1)\}$

$y=0$이면 $-(8p+2)=\dfrac{1}{2}\{x-(16p+1)\}$에서

$x=-3$이므로 점 B는 B$(-3,\ 0)$이다.

그러므로 삼각형 BOA의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 3\times(8p+2)=39$

따라서 $p=3$이고 A$(16p+1,\ 8p+2)=(49,\ 26)$

$a=49,\ b=26$이므로 $a+b=75$

18. [정답] ①

점 A의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

선분 AP가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{ABP}=\dfrac{\pi}{2}$

그러므로 점 B의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.

따라서 구하는 넓이를 $S(t)$는

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_1^t \ln x\,dx-\frac{1}{2}\times(t-1)\times\ln t\\&=\Big[\ x\ln x\ \Big]_1^t-\int_1^t 1dx-\frac{1}{2}(t-1)\ln t\\&=t\ln t-(t-1)-\frac{1}{2}(t-1)\ln t\\&=\frac{1}{2}t\ln t+\frac{1}{2}\ln t-t+1\end{aligned}$$

$S'(t)=\dfrac{1}{2}\ln t+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2t}-1$이고

$S'(e)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2e}-1=\dfrac{1}{2e}$

19. [정답] ③

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서

$f'(x)$

$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\sin x$

$f''(x)=2e^{-x}\sin x-2e^{-x}\cos x$

$\quad=2e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

따라서 $x=n\pi\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이고

(i) $n=2k-1\ (k=1,2,3,\ \cdots)$일 때,

$f''(x)=f''((2k-1)\pi)>0$이므로 $f(x)$가 극솟값을 가진다.

(ii) $n=2k\ (k=1,2,3,\ \cdots)$일 때,

$f''(x)=f''(2k\pi)<0$이므로 $f(x)$가 극댓값을 가진다.

따라서 $x_n=2n\pi$이고 $x_{10}=20\pi$

20. [정답] ④

집합 $A=\{x\,|\,0\le x\le 7,\ x$는 정수$\}$에서 서로 다른 세 수를 택한 후 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $7\times{}_7\mathrm{P}_2$

백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수인 사건을 A, 십의 자리의 수가 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.

(i) 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수인 경우

백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수인 경우의 수는 백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6의 3가지, 일의자리에 올 수 있는 수는 천의 자리에 온 수를 제외한 짝수 3가지이므로 $3\times 3=9$

백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=4\times 3=12$

십의 자리에 올 수 있는 수의 경우의 수는 6이므로 구하는 경우의 수는 $(9+12)\times 6=126$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{126}{7\times{}_7\mathrm{P}_2}=\dfrac{3}{7}$

(ii) 십의 자리의 수가 홀수인 경우

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{4\times 6\times 6}{7\times{}_7\mathrm{P}_2}=\dfrac{24}{49}$

(iii) 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 짝수이고 십의 자리의 수가 홀수인 경우

백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 짝수이고 십의 자리의 수가 홀수이면

백의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6의 3가지, 일의 자리에 올 수 있는 수는 배의 자리에 온 수를 제외한 짝수 3가지, 십의 자리에 모두 홀수가 오는 경우의 수는 4이므로 구하는 경우의 수는 $3\times 3\times 4=36$

백의 자리의 수와 일의 자리의 수가 모두 홀수이고 십의 자리의 수가 홀수이면 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3=24$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{36+24}{7\times{}_7\mathrm{P}_2}=\dfrac{10}{49}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\qquad=\dfrac{3}{7}+\dfrac{24}{49}-\dfrac{10}{49}=\dfrac{5}{7}$

21. [정답] ③

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{k^2+2k+2}=t$ …… ㉠라 하면

$x=at,\ y=bt,\ z=t(k^2+2k+2)$이므로

$x^2+y^2=16$ 에 대입하면

$(at)^2+(bt)^2=16$

$t^2(a^2+b^2)=t^2=16$

$t=\pm 4$

따라서 직선 ㉠과 주어진 원기둥이 만나는 점의 좌표는

$(4a,\ 4b,\ 4(k^2+2k+2))$,

$(-4a,\ -4b,\ -4(k^2+2k+2))$

그런데 $0\le z\le 10$이므로

$(-4a,\ -4b,\ -4(k^2+2k+2))$는 원기둥과 만날 수 없고 $4(k^2+2k+2)=4(k+1)^2+4\ge 4$이고, $a,\ b$가 양의 실수이므로 $(4a,\ 4b,\ 4(k^2+2k+2))$은 원기둥의 $x>0,\ y>0,\ 4\le z\le 10$인 부분과 만난다. 따라서 구하는 영역의 넓이는

$\dfrac{1}{4}\times(2\pi\times 4)\times 6=12\pi$

22. [정답] 109

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{10}=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{10}\times\dfrac{9}{10}=9$

따라서 $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\qquad=9+10^2=109$

23. [정답] 144

여학생 3명을 묶어서 한 사람으로 생각하면 5명의 학생이 원탁에 둘러앉는 것이므로 $(5-1)!=24$(가지)

여학생 3명이 서로 위치를 바꿔 앉을 수 있으므로 $3!=6$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 6=144$

24. [정답] 40

$x(t)=t+\dfrac{20}{\pi^2}\cos(2\pi t)$에서

$x'(t)=1-\dfrac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$

$x''(t)=-80\cos(2\pi t)$

따라서 점 P의 시각 $t=\dfrac{1}{3}$에서의 가속도의 크기는

$\left|x''\left(\dfrac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\dfrac{2\pi}{3}\right|=40$

$\qquad=\left|-80\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|=40$

25. [정답] 240

사원 600명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\dfrac{n}{600}$

이 회사의 전체 사원 중 하루 교통비가 5000원 미만인 사원의 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{600}}\le p\le\hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{600}}$ 이므로

$b-a=2\times 2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=0.1032$

$\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=\dfrac{1}{50},\ \hat{p}\hat{q}=\dfrac{6}{25}$

$\hat{q}=1-\hat{p}$이므로 $\hat{p}(1-\hat{p})=\dfrac{6}{25}$에서

$25\hat{p}^2-25\hat{p}+6=0$

$(5\hat{p}-3)(5\hat{p}-2)=0$

$\hat{p}=\dfrac{3}{5}$ 또는 $\hat{p}=\dfrac{2}{5}$

이때 $n\le 300$이므로 $\hat{p}=\dfrac{n}{600}\le\dfrac{300}{600}=\dfrac{1}{2}$에서

$\hat{p}=\dfrac{2}{5}$이다.

따라서 $\hat{p}=\frac{n}{600}=\frac{2}{5}$ 이므로 $n=240$ 이다.

26. [정답] 8

$\angle P_kOA=\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\times k=\frac{\pi}{2n}k$ 이므로

$\angle P_kOQ_k=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}k$

$\overline{P_kQ_k}=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}k\right)=4\cos\frac{\pi}{2n}k$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}l_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}4\cos\frac{\pi}{2n}k$$
$$=4\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=4\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=4\left(\frac{2}{\pi}-0\right)=8$$

27. [정답] 4

$x=t-2\sqrt{t},\ y=\frac{8}{3}\sqrt[4]{t^3}$ 에서

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{\sqrt{t}},\ \frac{dy}{dt}=\frac{2}{\sqrt[4]{t}}$ 이므로

$t=0$에서 $t=a$까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt[4]{t}}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}\,dt=\int_0^a\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$
$$=\left[t+2\sqrt{t}\right]_0^a=a+2\sqrt{a}$$

$a+2\sqrt{a}=8$에서 $(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+4)=0$

$\sqrt{a}=2$ 따라서 $a=4$

28. [정답] 11

그림과 같이 밑면과 60° 의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때 생기는 단면인 원의 지름이 $\overline{BC}$ 가 되도록 점 C 를 정하고 단면인 원의 중심을 O$'$이라 하자.

이때 $\triangle OBC$ 에서 $\overline{OB}$ 와 $\overline{OC}$ 는 구의 반지름이므로 $\overline{OB}=\overline{OC}=6$이고 $\angle OBC=\angle OCB=60^\circ$ 이므로 $\triangle OBC$ 는 정삼각형이다.

즉, 한 변의 길이가 6 인 정삼각형 OBC 의 한 꼭짓점 O 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발은 $\overline{BC}$ 의 중점 O$'$이므로 $\overline{O'B}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6=3$

따라서 자른 단면의 넓이를 S라 하면

$S=\pi\times\overline{O'B}^2=\pi\times3^2=9\pi$

이므로 구하는 정사영의 넓이를 S'는

$S'=9\pi\times\cos60^\circ=9\pi\times\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\pi$

따라서 $p=2,\ q=9$이므로 $p+q=11$

29. [정답] 1512

한 번의 게임에서 갑이 이기는 경우의 수는 갑, 을, 병 세 사람이 뽑은 카드에 적힌 수가 모두 다르고 그 중 가운데 수를 갑이 뽑은 경우이다.

갑, 을, 병이 서로 다른 세 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}P_3=10\times9\times8=720$이므로 세 사람 중 한사람이 이기는 확률은 $\frac{720}{10^3}=\frac{18}{25}$

이때 갑 또는 을이 이기는 확률은 각각 $\frac{720}{10^3}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{25}$ 비기는 확률은 $1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$

갑, 을이 각각 1번씩 이기고 1번은 비기는 경우의 확률은

$3!\times\frac{6}{25}\times\frac{6}{25}\times\frac{7}{25}=\frac{1512}{5^6}$

따라서 $a=1512$

30. [정답] 22

점 P 의 좌표를 $(0,\ t,\ 0)\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이라 하자.

점 P 를 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 QPR 의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}(1+\sin t)\left(-t+\frac{\pi}{2}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t\sin t+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\sin t+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t\sin t+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\sin t+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}t+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\sin t+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right\}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{4}t^2-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\cos t+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos t\,dt\right)$$
$$=-\frac{\pi^2}{16}-0+\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(0+\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{16},\ b=\frac{1}{8},\ c=-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=16+8-2=22$

제 2 회 정답

1	②	2	①	3	④	4	②	5	④
6	④	7	⑤	8	③	9	④	10	②
11	④	12	⑤	13	④	14	④	15	①
16	⑤	17	③	18	②	19	⑤	20	②
21	⑤	22	10	23	7	24	5	25	5
26	41	27	788	28	27	29	625	30	100

1. [정답] ②

$x-\pi=t$라 하면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\tan(\pi+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-\tan t}{t}=-1$$

2. [정답] ①

선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 B의 좌표는

$\left(\frac{1\times1+2\times(-5)}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times b+2\times0}{1+2}\right)$

$=\left(-3,\ 4,\ \frac{b}{3}\right)$이므로 $-3=a,\ \frac{b}{3}=-2$이다.

따라서 $a=-3,b=-6$이므로 $a+b=-9$

3. [정답] ④

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A,\ B^C$도 서로 독립이다.

$P(A)=1-P(A^C)=\frac{2}{3}$ 따라서

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{2}{3}\times P(B^C)=\frac{1}{6}$

에서 $P(B^C)=\frac{1}{4}$

그러므로 $P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

이때 두 사건 $A^C,\ B$도 서로 독립이므로

$P(B|A^C)=P(B)=\frac{3}{4}$

4. [정답] ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{a}x$

점근선 중 제1사분면을 지나는 직선의 기울기는 양수이므로 $a>0$이므로 $y=\frac{3}{a}x$

따라서 $\frac{3}{a}=\frac{a}{2}$에서 $a^2=6$이므로 $a=\sqrt{6}$

5. [정답] ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-bx)}{1-e^{ax}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1-bx)}{-bx}\times\frac{ax}{e^{ax}-1}\times\frac{b}{a}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$$

이고, $f(0)=b$이므로 $\frac{b}{a}=b$

$b\neq0$이므로 $a=1$

6. [정답] ④

부모 2명을 한 묶음으로 하여 자녀 4명과 함께 원탁 둘레에 앉는 경우의 수는 $(5-1)!=24$

남학생 2명의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 부모가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$24\times2=48$

6명이 앉는 경우의 수는 $(6-1)!=120$

따라서 부모끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 $120-48=72$

7. [정답] ⑤

이 공장에서 생산하는 구슬의 지름의 길이를 확률변수 $X(cm)$라 하면 X는 정규분포 $N(24.8,\ 0.2^2)$을 따른다.

이 공장에서 생산한 구슬 중 임의추출한 25개의 지름의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $E(\overline{X})=E(X)=24.8$

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{25}}\sigma(X)=0.04$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(24.8,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(\overline{X}\le24.88)=P\left(\frac{\overline{X}-24.8}{0.04}\le\frac{24.88-24.8}{0.04}\right)$$
$$=P(Z\le2)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$

8. [정답] ③

$\int g'(x)dx=g(x)+C$ (C는 적분상수)이므로

$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}g'(x)dx=g(\sqrt{3})-g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$g(\sqrt{3})=a$라 하면 $f(a)=\tan a=\sqrt{3}$ 이므로

$a=\frac{\pi}{3}$

$g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=b$라 하면 $f(b)=\tan b=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $b=-\frac{\pi}{6}$

$$\text{따라서 }\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}g'(x)dx=g(\sqrt{3})-g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$$

9. [정답] ④

A당의 지지율을 p라 하면 표본비율

$\hat{p}=\frac{1470}{2100}=0.7$이므로 $\hat{q}=0.3$

$\hat{p}-2\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le p\le\hat{p}+2\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ 에서

$0.7-2\sqrt{\dfrac{0.7\times0.3}{2100}} \le p \le 0.7+2\sqrt{\dfrac{0.7\times0.3}{2100}}$

$0.68 \le p \le 0.72$ 따라서 $n=72$

10. [정답] ②

$x=t^2,\ y=-t^2+4t$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=-2t+4$이므로

점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라 하면

$\vec{v}=(2t,\ -2t+4)$

$|\vec{v}|=\sqrt{(2t)^2+(-2t+4)^2}$

$=\sqrt{8(t-1)^2+8}$

따라서 $|\vec{v}|$가 최소가 되는 것은 $t=1$일 때이고

$x=1^2=1,\ y=-1^2+4\cdot1=3$

따라서 $a=1,\ b=3$이므로

$a+b=4$

11. [정답] ④

$f(x)=xe^x$라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$라 하면 접선의 방정식은

$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-te^t=(t+1)e^t(1-t),\ -t=(t+1)(1-t)$

$t^2-t-1=0$

이 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

접선의 기울기는 각각 $(\alpha+1)e^{\alpha},\ (\beta+1)e^{\beta}$이므로

$m_1m_2=(\alpha+1)e^{\alpha}\cdot(\beta+1)e^{\beta}$

$=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta}$

$=(-1+1+1)e^1=e$

12. [정답] ⑤

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

$xy=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$y+x\dfrac{dy}{dx}=0$

즉, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}(x\ne0)$

이므로 점 P에서 곡선 $xy=2$에 접하는 직선의 기울기는 $-\dfrac{b}{a}$이다.

$x^2+y^2=4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

즉, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}(y\ne0)$

이므로 점 P에서 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 직선의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이다.

따라서 점 P에서 곡선 $xy=2$과 원 $x^2+y^2=4$에 각각 접하는 두 직선의 기울기 의 곱은

$\left(-\dfrac{b}{a}\right)\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=1$

13. [정답] ④

타원의 두 초점의 좌표를 $F(0,\ k),\ F'(0,\ -k)$ $(k>0)$,

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$k=\sqrt{25-9}=4$

$\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF}=(a,\ b)-(0,\ 4)=(a,\ b-4)$

$\overrightarrow{F'P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF'}=(a,\ b)-(0,\ -4)$

$=(a,\ b+4)$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}=a^2+(b-4)(b+4)=a^2+b^2-16$

점 $P(a,\ b)$는 타원 위의 점이므로 $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{25}=1$

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}=-\dfrac{16}{9}a^2+9\ \ (-3\le a\le3)$

따라서 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}$의 최댓값은 $a=0$일 때 9이다.

14. [정답] ④

곡선 $y=e^x$과 $y=\ln x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 원의 중심은 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 곡선 $y=e^x$과 $y=\ln x$ 사이를 지날 수 있는 원의 반지름의 최댓값은

곡선 $y=e^x$ 위의 점에서 직선 $y=x$까지의 최단거리가 원의 반지름의 길이가 된다.

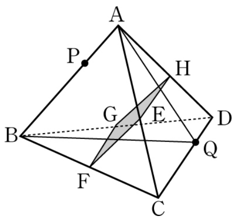
$y=e^x$에서 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ e^t)$이라 하면 $e^t=1$이므로 $t=0$

따라서 점 $(0,\ 1)$에서 직선 $x-y=0$까지의 거리를 r라 하면

$r=\dfrac{|0-1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 원의 넓이의 최댓값 S는

$S=\pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$

15. [정답] ①



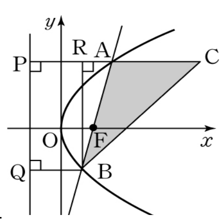
그림과 같이 $\triangle ABQ$에서 점 Q를 고정하면 점 P가 움직일 때, 점 M의 자취는 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$의 중점을 잇는 선분이다.

점 Q를 움직이면 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$의 중점을 잇는 선분이 사각형 EFGH를 이룬다.

$\overline{FG}=\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{CD}=3,\ \overline{HG}=\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3,$

$\overline{AB}\perp\overline{CD}$ 따라서 구하는 도형은 한 변의 길이가 3인 정사각형이므로 넓이는 9이다.

16. [정답] ⑤



초점의 좌표를 $(p,\ 0)$이라 하고 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, 점 B에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{AR}=\overline{AP}-\overline{PR}=\overline{AP}-\overline{BQ}$

$=3-2=1$

$\triangle ARB$에서

$\overline{BR}^2=\overline{AB}^2-\overline{AR}^2=5^2-1^2=24$

$\overline{BR}=2\sqrt{6}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

17. [정답] ③

곡선 $y=\tan x$ 위의 점 $P(t,\ \tan t)\ \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$를 중심으로 하고 직선 $y=x$에 접하는 원의 반지름의 길이 $f(t)$는 점 P와 직선 $x-y=0$사이의 거리와 같으므로

$f(t)=\dfrac{|t-\tan t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|t-\tan t|}{\sqrt{2}}$

이때 $g(t)=t-\tan t$라 하면 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서

$g'(t)=1-\sec^2t=-\tan^2t<0$

이므로 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $g(t)$는 증가하고 $t=0$일 때,

$g(0)=0-\sin0=0$이므로 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)<0$이다.

따라서 $f(t)=\dfrac{\tan t-t}{\sqrt{2}}$이므로

$f'(t)=\dfrac{\sec^2t-1}{\sqrt{2}}$ 따라서

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sec^2\dfrac{\pi}{4}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

18. [정답] ②

$\beta:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=5$는 점 $(a,\ b,\ c)$이 중심이고 반지름이 $\sqrt{5}$인 원이므로

점 $(a,\ b,\ c)$가 직선 $x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$을 따라 움직이면 반지름이 $\sqrt{5}$이고 중심축이

$x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$인 원기둥이 된다.

중심축이 방향벡터 $(1,\ 2,\ 2)$와 α가 이루는 각을 θ라 하면

두 벡터 $(1,\ 2,\ 2)$와 $(1,\ 2,\ -1)$가 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\left|\dfrac{1\times1+2\times2+1\times(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}\right|$

따라서 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$이고 이때 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

평면 α와 원기둥 β가 만나서 생기는 단면의 넓이를 S라 하면 $S\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\pi(\sqrt{5})^2$이므로 $S=\sqrt{30}\pi$

평면 α와 평면 $x-y+2z=6$가 이루는 각을 α라 하면

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\left|\dfrac{1\times1+2\times(-1)+(-1)\times2}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}\right|$

따라서 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$이고 이때 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x-y+2z=6$위로의 정사영의 넓이는

$\sqrt{30}\pi\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}\pi$

19. [정답] ⑤

$\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)dx$에서 $2x-1=t$로 놓으면

$2=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=-1,\ x=1$일 때 $t=1$이므로

$\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(t)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)dx$

그러므로 $\displaystyle\left|\int_0^1 f(2x-1)dx\right|<\frac{1}{2}\int_{-1}^1|f(x)|dx$

에서

$\displaystyle\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right|<\frac{1}{2}\int_{-1}^1|f(x)|dx$

$\displaystyle\left|\int_{-1}^1 f(x)dx\right|<\int_{-1}^1|f(x)|dx$ …… ㉠

함수 $f(x)=xe^{-x^2}+k$에 대하여

$f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=-(2x^2-1)e^{-x^2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

$f(-1)=-\dfrac{1}{e}+k,\ f(1)=\dfrac{1}{e}+k$

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}+k,\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}+k$

이고

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<f(-1),\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>f(1)$

따라서 ㉠을 만족시키기 위해서는

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<0,\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$이어야 한다.

$-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}+k<0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2e}}+k>0$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}<k<\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$

따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}},\ \beta=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$이고 $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2e}$

20. [정답] ②

두 번의 시행으로 합이 8이 되는 사건을 X, 1이 쓰인 공만을 가져가는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)$이다. 빨간 주사위와 푸른 주사위의 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면 사건 X가 일어날 확률은 다음과 같이 구분하여 구할 수 있다.
(i) 2가 쓰인 공만 사용하는 경우
두 번의 시행으로 2가 쓰인 공만 4개를 가져가야 한다.

첫 번째 시행	두 번째 시행
(홀, 1)	(홀, 3)
(홀, 2)	(홀, 2)
(홀, 3)	(홀, 1)

따라서 구하는 확률은 $3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$
(ii) 1과 2가 쓰인 공을 모두 사용하는 경우
두 번의 시행으로 2가 쓰인 공과 1이 쓰인 공을 각각 1개, 6개 또는 2개, 4개 또는 3개, 2개를 가져가야 한다.

첫 번째 시행	두 번째 시행
(홀, 1)	(짝, 6)
(홀, 2)	(짝, 4)
(홀, 3)	(짝, 2)

위의 표에서 첫 번째 시행과 두 번째 시행이 바뀌는 경우도 있으므로 구하는 확률은 $2\times3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$
(iii) 1이 쓰인 공만 사용하는 경우
두 번의 시행으로 1이 쓰인 공만 8개를 가져가야 한다.

첫 번째 시행	두 번째 시행
(짝, 2)	(짝, 6)
(짝, 3)	(짝, 5)
(짝, 4)	(짝, 4)
(짝, 5)	(짝, 3)
(짝, 6)	(짝, 2)

따라서 구하는 확률은 $5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$
(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(X)=3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2+2\times3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2+5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$$
$$=14\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$$

이고 $\mathrm{P}(X\cap Y)=5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2$이므로

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{5\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2}{14\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{5}{14}$$

21. [정답] ⑤
ㄱ. $f(x)=\frac{\ln|x|}{x-1}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln|x|}{(x-1)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln|x|}{(x-1)^2}$$

$g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln|x|$이므로
$\lim_{x\to1}g(x)=0$ [참]
ㄴ. $g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln|x|$라 하면

$$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$$

이므로 $x>1$일 때, $g'(x)<0$이고
$x<1$일 때, $g'(x)>0$이므로
$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. [참]
ㄷ. 함수 $h(x)=\ln x$는 닫힌 구간 $[1,a]$에서 연속이고 열린 구간 $(1,a)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{\ln a-\ln1}{a-1}=h'(c),\ 즉\ \frac{\ln a}{a-1}=h'(c)$$

인 c가 열린구간 $(1,a)$에 적어도 하나 존재한다.
이때 $h'(x)=\frac{1}{x}$이므로 $\frac{\ln a}{a-1}=\frac{1}{c}$
한편, $1<c<a$에서 $\frac{1}{a}<\frac{1}{c}<1$이므로

$$\frac{1}{a}<\frac{\ln a}{a-1}<1$$
$$\frac{1}{a}<f(a)<1\ \text{[참]}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [정답] 10
함수 $y=\log(x-10)-1$의 그래프는 곡선 $y=\log x$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.
그런데 곡선 $y=\log x$의 점근선의 방정식은 $x=0$이므로 곡선 $y=\log(x-10)-1$의 점근선은 직선 $x=0$을 x축의 방향으로 10만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것과 같다.
따라서 점근선 l의 방정식은 $x=10$이므로
원점과 직선 $l:x=10$사이의 거리는 10이다.

23. [정답] 7
20을 4 이상이고 10 이하인 자연수만의 합으로 분할하는 모든 경우의 수는

$$\begin{aligned}20&=10+10\\&=10+6+4\\&=8+8+4\\&=8+6+6\\&=8+4+4+4\\&=6+6+4+4\\&=4+4+4+4+4\end{aligned}$$

의 7개다.

24. [정답] 5
x_1, x_2, x_3의 공차가 d이므로
$x_1=x_2-d,\quad x_3=x_2+d$
따라서 x_1, x_2, x_3의 평균 m과 분산 σ^2을 구하면

$$m=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{3x_2}{3}=x_2$$
$$\sigma^2=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}{3}-{x_2}^2$$
$$=\frac{(x_2-d)^2+{x_2}^2+(x_2+d)^2}{3}-{x_2}^2$$
$$=\frac{3{x_2}^2+2d^2}{3}-{x_2}^2=\frac{2}{3}d^2$$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로
$p+q=3+2=5$

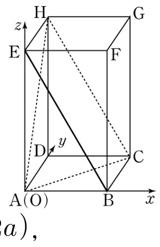
25. [정답] 5
주기는 $2\pi\div\frac{1}{p}=2\pi$에서 $p=1$

$$f(x)=a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+b$$

최솟값은 $a+b=-5$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+b=\frac{5}{2}$$

$-a+2b=5$ 두 식을 연립하면 $a=-5,\ b=0$이므로
$-p(a+b)=5$

26. [정답] 41


그림과 같이 점 A가 원점에 오도록 좌표축을 설정하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=a$이면
$\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(a,0,0)$, $\mathrm{H}(0,a,2a)$,
$\mathrm{E}(0,0,2a)$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{EB}}=(a,0,-2a)$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(0,a,2a)$에서

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EB}}||\overrightarrow{\mathrm{AH}}|}$$
$$=\frac{|(a,0,-2a)\cdot(0,a,2a)|}{\sqrt{5}a\times\sqrt{5}a}=\frac{4}{5}$$

따라서 $a=5,\ b=4$이므로
$a^2+b^2=41$

27. [정답] 788
(i) 1명씩 내릴 때
네 명이 내리게 될 4개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 5개이다. 이 5개의 층 사이 및 양 끝의 6곳 (∨ 표시된 곳) 중에서 서로 다른 4곳을 택하여 각각 1명씩 내리면 된다.

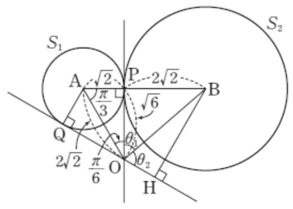
$\vee\square\vee\square\vee\square\vee\square\vee\square\vee$

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{P}_4=6\times5\times4\times3=360$
(ii) 1명, 1명, 2명씩 내릴 때
같이 내릴 2명을 선택하는 경우의 수가
${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2}=6$
내리게 될 3개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 6개다.
위와 같은 방법으로 이 6개의 층 사이 및 양 끝의 7곳 중에서 서로 다른 3곳을 택하여 내리면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{P}_3=6\times(7\times6\times5)=1260$
(ii) 2명, 2명씩 내릴 때
같이 내릴 2조를 선택하는 경우의 수가
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2}=\frac{4\times3}{2}\times\frac{1}{2}=3$
내리게 될 2개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 7개다.
위와 같은 방법으로 이 7개의 층 사이 및 양 끝의 8곳 중에서 서로 다른 2곳을 택하여 내리면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 8개에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
$3\times{}_8\mathrm{P}_2=3\times(8\times7)=168$
따라서 구하는 경우의 수는
$n=360+1260+168=1788$이므로
$n-1000=788$

28. [정답] 27
집합 A의 원소의 개수를 a, 집합 B의 원소의 개수를 b, 집합 $A\cap B$의 원소의 개수를 c라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{a}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{b}{6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{c}{6}$
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A)P(B)=P(A\cap B)$가 성립해야 한다.
$\frac{ab}{36}=\frac{c}{6}$에서 $ab=6c$
이때 $c=1$ 또는 $c=2$이다.
(i) $c=1$이면 $A\cap B=\{$빨강$\}$이다.
$ab=6c$에서 $ab=6$이고 노랑 $\not\in S$이다.
$a\le3$, $b\le4$이므로 ① $a=2$, $b=3$인 경우
집합 A의 개수는 파랑과 보라색 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 S의 나머지 2개의 원소는 남색과 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $2\times3=6$
② $a=3$, $b=2$인 경우
집합 A는 {빨강, 파랑, 보라색}이고, 집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이때 $n(A\cup B)=4$이므로 집합 S의 나머지 2개의 원소는 남색과 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $1\times3=3$
(ii) $c=2$이면 $A\cap B=\{$빨강, 노랑$\}$
$ab=6c$에서 $ab=12$이고 $a\le4$, $b\le5$이므로 a, b는 다음 2가지 경우이다.
① $a=3$, $b=4$인 경우
집합 A의 개수는 파랑, 보라색 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{C}_1=2$
집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 S의 나머지 1개의

원소는 남색 또는 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $2\times3\times2=12$
② $a=4$, $b=3$인 경우
집합 A는 {빨강, 노랑, 파랑, 보라색}이고 집합 B의 개수는 적외선, 주황, 초록 중 1개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
이때 $n(A\cup B)=5$이므로 집합 S의 나머지 1개의 원소는 남색 또는 자외선이다.
따라서 집합 S의 개수는 $1\times3\times2=6$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 집합 X의 개수는
$6+2+12+6=27$

29. [정답] 625
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$이고 $\angle\mathrm{APO}=\dfrac{\pi}{2}$이다.
또한 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AP}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$



점 B에서 직선 OQ에 내린 수선의 발을 H, $\angle\mathrm{POA}=\alpha$, $\angle\mathrm{POB}=\theta_1$, $\angle\mathrm{BOH}=\theta_2$라 하고, 점 A, B, P, Q, O를 지나는 평면으로 자른 단면은 위의 그림과 같다. $2\alpha+\theta_1+\theta_2=\pi$이고
$\sin\theta_1=\dfrac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$
$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
$\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$
$\cos2\alpha=\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{20}{81}}=\dfrac{\sqrt{61}}{9}$
$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{OB}}\sin\theta_2$
$=\sqrt{21}\sin(\pi-2\alpha-\theta_1)$
$=\sqrt{21}\sin(2\alpha+\theta_1)$
$=\sqrt{21}(\sin2\alpha\cos\theta_1+\cos2\alpha\sin\theta_1)$
$=\sqrt{21}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{9}\times\dfrac{4}{\sqrt{21}}+\dfrac{\sqrt{61}}{9}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}\right)$
$=\dfrac{8\sqrt{5}+\sqrt{305}}{9}=\dfrac{\sqrt{320}+\sqrt{305}}{9}$
따라서 $a+b=320+305=625$

30. [정답] 100
직각삼각형 PQR에서 $\tan t=\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\tan t}$이므로
$\overline{\mathrm{PR}}=\tan^2 t$
그러므로 단면의 넓이 $S(t)$는
$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\tan t\times\tan^2 t=\dfrac{1}{2}\tan^3 t$
따라서 구하는 부피를 V라 하면
$V=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}S(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 t\,dt$
$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\tan^2 t\,dt$
$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t(\sec^2 t-1)dt$
$=\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec^2 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt\right)$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec^2 t\,dt$에서
$\tan t=x$라 하면 $\sec^2 t=\dfrac{dx}{dt}$이고
$t=0$일 때 $x=0$, $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $x=1$이므로
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\sec^2 t\,dt=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$
$=-\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=\dfrac{1}{2}\ln2$
따라서 $V=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln2$이므로
$p=q=\dfrac{1}{2}$이고 $100(p+q)=100$

제 3 회 정답

1	①	2	①	3	⑤	4	⑤	5	②
6	⑤	7	②	8	⑤	9	⑤	10	④
11	⑤	12	③	13	④	14	③	15	④
16	③	17	④	18	⑤	19	①	20	①
21	⑤	22	42	23	11	24	20	25	22
26	90	27	15	28	10	29	7	30	20

1. [정답] ①
$2\vec{a}+\vec{b}=2(x,\ -2)+(-1,\ 3x)$
$=(2x-1,\ 3x-4)$
이므로 모든 성분의 합은
$2x-1+3x-4=5x-5=0$
따라서 $x=1$

2. [정답] ①
$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x(e^{2x}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x(e^{2x}-1)}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$
$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x(e^{2x}-1)}\times\frac{1}{1+\cos x}$
$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x(e^{2x}-1)}\times\frac{1}{1+\cos x}$
$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\frac{e^{2x}-1}{x}}\times\frac{1}{1+\cos x}$
$=\dfrac{1^2}{\ln e^2}\times\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{4}$

3. [정답] ⑤
$\displaystyle\int_0^2\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^2\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$
$=\Big[\ln(x^2+x+1)\Big]_0^2=\ln7-\ln1=\ln7$

4. [정답] ⑤
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{6}$
$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{3}$
$\mathrm{P}(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{3}\times\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{6}$이므로
$\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{4}$이고 $\mathrm{P}(B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

5. [정답] ②
$f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$
$f''(x)=\dfrac{2(x^2+2x)-(2x+2)\times(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$
$=\dfrac{-2x^2-4x-4}{(x^2+2x)^2}$
따라서 $f''(1)=\dfrac{-2-4-4}{(1+2)^2}=-\dfrac{10}{9}$

6. [정답] ⑤
모음 사이에 들어갈 자음 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$
두 모음과 그 사이에 서는 자음을 하나의 그룹으로 생각하면 나머지 자음 3개와 이 그룹을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
모음 2개의 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $4\times24\times2=192$

7. [정답] ②
점 A를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}(-a,\ 2,\ 1)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-a,\ 1,\ 2a+2)$
$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-a-2,\ -1,\ -2-2a)$
두 직선 AB, BC가 서로 수직이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$
$=(2-a,\ 1,\ 2a+2)\cdot(-a-2,\ -1,\ -2-2a)$
$=(a^2-4)-1-(2a+2)^2=-3a^2-12a-9=0$
$(a+3)(a+1)=0$
따라서 $a=-3$ 또는 $a=-1$이고 합은 -4

8. [정답] ⑤
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=k$라 하면 두 벡터 $2\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{a}-2\vec{b}$는 서로 수직이므로
$(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=6|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2$
$=6k^2+5\times k\times k\times\cos\theta-6k^2$
$=5k^2\cos\theta=0$ 따라서 $\cos\theta=0$

9. [정답] ⑤
직선 AB의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(4,\ -4,\ 2)$이고 평면 $x-2y+2z-12=0$의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하면 $\vec{h}=(1,\ -2,\ 2)$이다.
직선 AB와 평면 $x-2y+2z-8=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{h}}{|\vec{v}||\vec{h}|}$
$=\dfrac{(4,\ -4,\ 2)\cdot(1,\ -2,\ 2)}{6\times3}=\dfrac{16}{18}=\dfrac{8}{9}$
그러므로
$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{9}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$
$\mathrm{A}(4,\ 6,\ 1)$, $\mathrm{B}(8,\ 2,\ 3)$
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4-8)^2+(6-2)^2+(1-3)^2}=6$
따라서 구하는 정사영의 길이는
$6\times\dfrac{\sqrt{17}}{9}=\dfrac{2\sqrt{17}}{3}$

10. [정답] ④
주사위 2개를 동시에 던져 나온 두 눈의 곱이 홀수일 확률은 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$이므로 두 눈의 곱이 짝수일 확률은 $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$
꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 시행을 6번 반복했을 때, 꼭짓점 C에 오는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) 짝수가 2번 홀수가 4번 나오는 경우
${}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{135}{2^{12}}$
(ⅱ) 짝수가 4번 홀수가 2번 나오는 경우
${}_6\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{1215}{2^{12}}$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{135+1215}{2^{12}}=\dfrac{675}{2^{11}}$

11. [정답] ⑤

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{100}\right)$을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}\left(\overline{X} \ge m+\dfrac{\sigma}{5}\right)+\mathrm{P}\left(\overline{Y} \ge m-\dfrac{\sigma}{6}\right)=1$ 에서

$\mathrm{P}(Z \ge 2)+\mathrm{P}\left(Z \ge -\dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)=1$

이므로 $2=\dfrac{\sqrt{n}}{6}$ 이고 $\sqrt{n}=12$ 따라서 $n=144$

12. [정답] ③

$\sqrt{x}=t$라 하면 $x=t^2$에서 $dx=2t\,dt$

$f(x)=\int \sin t \cdot 2t dt$

$=-2t\cos t+2\int \cos t dt$

$=-2t\cos t+2\sin t+C$

$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$

$f(0)=C=\pi$이므로

$f(\pi^2)=-2\sqrt{\pi^2}\cos\sqrt{\pi^2}+2\sin\sqrt{\pi^2}+\pi$

$=-2\pi\cos\pi+2\sin\pi+\pi=3\pi$

13. [정답] ④

$x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$ 에서

$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos t+\sin t),\ \dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$|v(t)|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{e^{-2t}\{(\cos t+\sin t)^2+(\cos t-\sin t)^2\}}$

$=\sqrt{2e^{-2t}}=\sqrt{2}\,e^{-t}$

따라서 점 P 가 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 움직인 거리를 l 이라 하면

$l=\int_0^2 |v(t)|dt=\sqrt{2}\int_0^2 e^{-t}dt$

$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^2=\sqrt{2}\left(1-\dfrac{1}{e^2}\right)$

14. [정답] ③

이산확률변수 X의 모든 값에 대한 확률의 합은 1 이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=100)$

$=4^{50}\left\{{}_{100}\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 p^{100}+{}_{100}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{63}\right)^1 p^{99}+\right.$

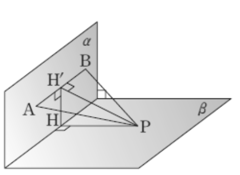
$\left.{}_{100}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 p^{98}+\cdots+{}_{100}\mathrm{C}_{100}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100} p^0\right\}$

$=2^{100}\left(\dfrac{1}{3}+p\right)^{100}=1$

$\left(\dfrac{2}{3}+2p\right)^{100}=1$이므로 $\dfrac{2}{3}+2p=1$

$2p=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ 따라서 $p=\dfrac{1}{6}$

15. [정답] ④



그림과 같이 점 P 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H 에서 직선 AB 에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha,\ \overline{\mathrm{HH'}}\perp$(직선 AB)

그러므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH'}}\perp$(직선 AB)

한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로 $\overline{\mathrm{HH'}}=2$

또 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=4$

그러므로 직각삼각형 PHH′에서

$\overline{\mathrm{PH'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HH'}}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH'}}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$

16. [정답] ③

$F(t)=\mathrm{P}(X\ge m-a\sigma t)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{m-a\sigma t-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -at)$

$G(t)=\mathrm{P}(Y\le 2m+b\sigma t)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{2m+b\sigma t-2m}{2\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{bt}{2}\right)$

ㄱ. $F(1)=\mathrm{P}(Z\ge -a)$,

$G(2)=\mathrm{P}(Z\le b)=\mathrm{P}(Z\ge -b)$

$F(1)=G(2)$이면 $-a=-b$이므로 $a=b$ [참]

ㄴ. 양수 t에 대하여 $G(t)<F(t)$이면

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{bt}{2}\right)<\mathrm{P}(Z\ge -at)$

$\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{bt}{2}\right)<\mathrm{P}(Z\ge -at)$

$-\dfrac{bt}{2}>-at$

$b<2a$ [거짓]

ㄷ. $2t_1<t_2$이면 $-t_1>-\dfrac{t_2}{2}$에서 $a>0$이므로

$-at_1>-\dfrac{at_2}{2}$

$F(t_1)=\mathrm{P}(Z\ge -at_1)<\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{at_2}{2}\right)$

$G(t_2)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{bt_2}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{bt_2}{2}\right)$

㉠에 의해 $F(t_1)<G(t_2)$이려면 $-\dfrac{at_1}{2}\ge-\dfrac{bt_2}{2}$

이므로 $a\le b$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17. [정답] ④

ㄱ. $F(3)=\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}=\dfrac{6}{a}$ [거짓]

ㄴ. $F(k)+G(k)=\mathrm{P}(1\le X\le k)+\mathrm{P}(X>k)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 100)=1$ [참]

ㄷ. $F(m)-F(n)=\mathrm{P}(n\le X\le m)$

$=\mathrm{P}(X>n)-\mathrm{P}(X>m)$

$=G(n)-G(m)$ [참]

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

18. [정답] ⑤

$f(x)=ax-\ln(x^2+1)+a$에서

$f'(x)=a-\dfrac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=-\dfrac{2(x^2+1)-(2x)^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$f^{(3)}(x)=\dfrac{4x(x^2+1)^2-2(x^2-1)\cdot2(x^2+1)\cdot2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{-4x^3+12x}{(x^2+1)^3}$

$g(x)=bx^2+2bx+a$에서

$g'(x)=2bx+2b,\ g''(x)=2b,\ g^{(3)}(x)=0$

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 $x=0$ 에서의 접선이 서로 일치하므로

$f(0)=g(0),\ f'(0)=g'(0)$이 성립한다.

ㄱ. $f(0)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)-\{g(x)-g(0)\}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$=f'(0)-g'(0)=0$ [참]

ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-g'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)-\{g'(x)-g'(0)\}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x}$

$=f''(0)-g''(0)=-2-2b=0$

$\therefore b=-1$

$f'(0)=g'(0)$에서 $a=2b$

$\therefore a=2\times(-1)=-2$

$\therefore a+b=(-2)+(-1)=-3$ [참]

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)-g''(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)-f''(0)-\{g''(x)-g''(0)\}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(x)-g''(0)}{x}$

$=f^{(3)}(0)-g^{(3)}(0)=0-0=0$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. [정답] ①

$\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=1\cdot\theta=\theta$

$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=1-\cos\theta$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{1}{\cos\theta}-1=\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

이고 $\mathrm{P}\to\mathrm{A}$ 이면 $\theta\to0$

$\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}}{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}^4}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\cdot(1-\cos\theta)}{\theta^4}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\theta^4\cos\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to0}\left\{\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\right\}^2\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $100\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{A}}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}}{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}^4}=25$

20. [정답] ①

쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y=\dfrac{1}{2}x$이므로 양수 a에 대하여 쌍곡선의 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$

그러므로

$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+a^2},\ 0),\ \mathrm{F'}(-\sqrt{a^2+a^2},\ 0)$,

즉 $\mathrm{F}(\sqrt{2}a,\ 0),\ \mathrm{F'}(-\sqrt{2}a,\ 0)$이고 $\mathrm{A}(a,\ 0)$

또한 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=2a$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+2a$

삼각형 PF′F의 둘레의 길이가 10이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}+\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PF}}+2a)+2\sqrt{2a}+\overline{\mathrm{PF}}$

$=2\overline{\mathrm{PF}}+(2+2\sqrt{2})a=10$

에서 $\overline{\mathrm{PF}}=10-(1+\sqrt{2})a$

그런데 $\overline{\mathrm{AF}}=(\sqrt{2}-1)a$이고

$3-2\sqrt{2}\le\overline{\mathrm{AF}}\le6-4\sqrt{2}$ 이므로

$3-2\sqrt{2}\le(\sqrt{2}-1)a\le6-4\sqrt{2}$

$(3-2\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\le(\sqrt{2}+1)a$

$\le(6-4\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$1\le(\sqrt{2}+1)a\le2$

$\overline{\mathrm{PF}}=10-(1+\sqrt{2})a$이므로

$8\le\overline{\mathrm{PF}}\le9$

따라서 선분 PF의 길이의 최댓값은 9, 최솟값은 8이므로 그 합은 $9+8=17$

21. [정답] ⑤

ㄱ. $f(x)=\cos\dfrac{2\pi x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{-2\pi(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\left(-\sin\dfrac{2\pi x}{x^2+1}\right)$

$=\dfrac{2\pi(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\sin\dfrac{2\pi x}{x^2+1}$

$g(x)=\dfrac{2\pi x}{x^2+1}$ 라 하면 $g'(x)=\dfrac{-2\pi(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

따라서 함수 $g(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	π	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\dfrac{2\pi x}{x^2+1}=0$ 이고 $g(0)=0$ 이므로

$x<0$ 이면 $-\pi<\dfrac{2\pi x}{x^2+1}<0$ 이므로

$\sin\dfrac{2\pi x}{x^2+1}<0$

$x>0$ 이면 $0<\dfrac{2\pi x}{x^2+1}<\pi$ 이므로 $\sin\dfrac{2\pi x}{x^2+1}>0$

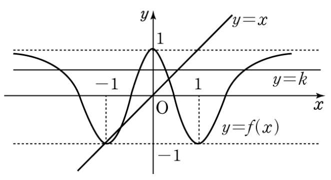
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pm1$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cos\dfrac{2\pi x}{x^2+1}=1$

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$에서 모든 극값의 합은 $-1+1-1=-1$이다. [참]

ㄴ. 그림과 같이 $y=k\ (-1<k<1)$와의 서로 다른 교점의 개수는 항상 4이다. [참]

ㄷ. 그림과 같이 직선 $y=x$ 와의 교점의 개수는 3이다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [정답] 42

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합의 개수는 $2^6=64$

공집합 또는 A 자신이 되는 부분집합의 개수는 2

두 집합의 원소의 개수가 같은 경우는

${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 분할의 개수는 $64-2-20=42$

23. [정답] 11

$\log_4(x-4)+\log_4(x+2)=\log_4(x-4)(x+2)$

$=\log_4(x^2-2x-8)$

이고 $2=\log_4 16$ 이므로 $x^2-2x-8\le16$

$x^2-2x-24\le0$

$(x+4)(x-6)\le0$ 즉, $-4\le x\le6$

로그의 진수 조건에서 $x-4>0,\ x+2>0$ 이므로 $x>4$ 따라서 $4<x\le6$ 이므로 구하는 정수 x 의 값의 합은 $5+6=11$

24. [정답] 20

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x$

$=\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt3}{2}\sin x$

이므로 주어진 방정식은

$\cos x-\sqrt3\sin x=\cos x-2\sin^2 x$

$\sin x(2\sin x-\sqrt3)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\dfrac{\sqrt3}{2}$

$\sin x=0$일 때, $x=0,\ \pi$

$\sin x=\dfrac{\sqrt3}{2}$일 때, $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

이므로 모든 실근의 합은

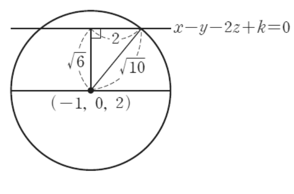
$0+\pi+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2}{3}\pi=2\pi$ 따라서 $10k=20$

25. [정답] 22

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z-2=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=16$ 이므로 구의 중심은 $(-1,\ 3,\ 2)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

이 구와 평면 $x-2y-2z+k=0$ 이 만나서 생기는 원의 넓이가 12π 가 되기 위해서는 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt3$ 이고 구의 반지름의 길이는 4이므로 구의 중심과 평면 $x-2y-2z+k=0$ 사이의 거리가 2이어야 한다.



점 $(-1,\ 3,\ 2)$ 와 평면 $x-2y-2z+k=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|-1-6-4+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=2$

$|k-11|=6$ 따라서 $k=17$ 또는 $k=5$ 이므로 구하는 실수 k 의 값의 합은 $17+5=22$

26. [정답] 90

♥♣♤의 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{3!\times3!}=140$

적어도 한 종류의 카드가 2장 이상 연속하게 나열되는 사건을 X라 하면 X의 여사건 X^c은 같은 종류의 카드끼리는 2장 이상 연속해서 나열되지 않는 것이다.

♥♥♥를 ①♥②♥③♥④와 같이 나열한 후 ①, ②, ③, ④의 자리에 ♣♣♣♤를 놓는 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) ②, ③에 ♣♣를 놓는 경우

♣♤는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 $2\times2=4$가지

(ⅱ) ②, ③에 ♣♤를 놓는 경우

♣♤를 ②, ③에 놓는 경우의 수는 $2!=2$가지

♣♣는 ① 또는 ④에 놓을 수 있지만 함께 놓을 수 없으므로 1가지

따라서 ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는 $2\times1=2$가지

(ⅲ) ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우

(♣♤)의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$가지

②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는 $2!=2$가지

♣는 ① 또는 ④에 놓을 수 있으므로 2가지

따라서 ②, ③에 (♣♤)와 ♣를 놓는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$가지

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 카드 7장을 같은 종류를 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는 $4+2+8=14$이므로

$\mathrm{P}(X^c)=\dfrac{14}{140}=\dfrac{1}{10}$ 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^c)=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$

따라서 $p=\dfrac{9}{10}$이고 $100p=90$

27. [정답] 15

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 타원이고 두 점 $\mathrm{A}(1,\ \sqrt3)$, $\mathrm{B}(5,\ \sqrt3)$의 중점이 타원의 중심이므로 $(3,\ \sqrt3)$이다.

타원과 직선 $x=3$이 만나는 점 중에서 y좌표가 최대일 때는 점 $(3,\ 3\sqrt3)$이다.

$\mathrm{B}(5,\ \sqrt3)$에서 점 $(3,\ 3\sqrt3)$까지 거리는

$\sqrt{(5-3)^2+(\sqrt3-3\sqrt3)^2}=4$

타원은 직선 $x=3$에 좌우가 대칭이고 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 값은 일정하게 $\mathrm{B}(5,\ \sqrt3)$에서 점 $(3,\ 3\sqrt3)$까지 거리의 2배이다.

따라서 $k=8$

또한 타원의 x축 위에 있는 두 꼭짓점 중 x좌표가 큰 점은 장축의 길이가 8이므로 중심 $(3,\ \sqrt3)$에서 4만큼 오른쪽으로 이동한 $(7,\ \sqrt3)$이다.

그러므로 $\alpha=7$ 따라서 $\alpha+k=7+8=15$

28. [정답] 10

선분 AB의 기울기는 1이므로 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$이므로

$y_2-y_1=x_2-x_1$

$y_2-y_1=x_2-x_1=k$라고 하면 $\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$이므로 k는 자연수이다. $y_2=y_1+k,\ x_2=x_1+k$를

$x_1+y_1+x_2+y_2=12$에 대입하면

$x_1+y_1+x_1+k+y_1+k=12$

$x_1+y_1+k=6$

세 자연수 $x_1,\ y_1,\ k$를 음이 아닌 정수 $x'_1,\ y'_1,\ k'$에 대하여 $x_1=x'_1+1,\ y_1=y'_1+1,\ k=k'$로 놓으면 $x'_1+y'_1+k'=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수해는

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

29. [정답] 7

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{16\sin^2\alpha+16\cos^2\alpha+3^2}=5$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{9\cos^2\beta+9\sin^2\beta+4^2}=5$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=12\sin\alpha\cos\beta+12\cos\alpha\sin\beta+12$

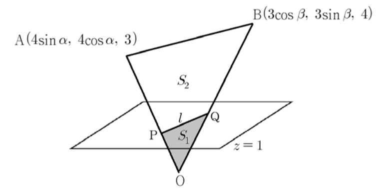
$=12\sin(\alpha+\beta)+12$

$=12\sin\dfrac{\pi}{2}+12=24$

삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{5^2\times5^2-24^2}=\dfrac{7}{2}$



그림과 같이 두 점 A, B의 z좌표가 평면 $z=1$보다 위에 있으므로 직선 l과 삼각형 OAB가 만나는 점을 P, Q라 하면

$\mathrm{OP}:\mathrm{OA}=1:3,\ \mathrm{OQ}:\mathrm{OB}=1:4$

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{OA}}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\overline{\mathrm{OB}}\right)\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin(\angle\mathrm{AOB})$

$=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{7}{24}$

따라서 $24S_1=7$

30. [정답] 20

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $f(g(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

주어진 조건에서

$f'(g(x))=1+\{f(g(x))\}^2=1+x^2$

㉠에서 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$g(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx$ 이므로

$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2 x$

이다.

$g(\tan\theta)=\displaystyle\int\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$

$=\displaystyle\int 1d\theta=\theta+C$

$f(0)=0$에서 $g(0)=0$이고, $0=\tan\theta$에서 $\theta=0$

이므로 $g(0)=0+C=0$

$C=0$이고 $g(\tan\theta)=\theta$

$\sqrt3=\tan\theta$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $g(\sqrt3)=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $f^{-1}(\sqrt3)=\dfrac{\pi}{3}$이므로 $k=\dfrac{1}{3}$이고

$60k=20$